

# Etude sur les développements de l'analyse des Matrices de Mueller en Polarimétrie

## I. La Décomposition en mode di atténuateurs : Analyse des Travaux de R. Ossikovski :

Calcul en complexe double pour utilise les routines d'algèbre linéaire de National Instruments

ComplexDouble[,] Matrix\_u; matrice  $M_u$

ComplexDouble[,] Matrix\_uT; matrice transposé  $\hat{i}$

ComplexDouble[,] Matrix\_v; matrice  $M_v$

ComplexDouble[,] Matrix\_RD; matrice  $M_{RD}$

ComplexDouble[,] Matrix\_Hi; matrice  $H_1$

ComplexDouble[,] Matrix\_Hj; matrice  $H_2$

ComplexDouble[,] Matrix\_D; matrice D

ComplexDouble[,] Cmatrix\_A; matrice A valeurs lues Mueller et forme complex

NationalInstruments.ComplexDouble[,] CM\_prime; matrice  $M'$  toutes ces matrices sont des matrices 4x4

On forme la matrice Identité Identité 3x3

$$\text{Identité} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou 1 et 0 sont en fait des valeurs complexes  $0 = 0+i0$ , ect..

et la matrice D (4x4) determinant sign flip

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Les données sont introduites ensuite sous la forme lecture du tableau grâce à la routine `matrixA = Read2DMatrix(matrixADataTextBox.Text);`

Puis ensuite par la boucle :

$$\text{Cmatrix\_A}[i, j].\text{Real} = \text{matrixA}[i, j]; \text{Cmatrix\_A}[i, j].\text{Imaginary} = 0.0;$$

[Résumé des equations du papier JOSA R Ossikovski](#)

En premier lieu, il s'agit de partitionner la matrice de Mueller M en la decomposant en SVD ,c'est à dire :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & b^T \\ a & N \end{bmatrix} \quad \text{eq(1)}$$

par identification on obtient les vecteurs

Vecteurs de polarizance  $a = [M_{21} \ M_{31} \ M_{41}]^T$  et

le vecteur de diattenuation b avec  $b = [M_{12} \ M_{13} \ M_{14}]^T$  soit par exemple pour b en C#

$$b[0].\text{Real} = \text{matrixA}[0, 1];$$

$$b[1].\text{Real} = \text{matrixA}[0, 2];$$

$$b[2].\text{Real} = \text{matrixA}[0, 3];$$

On cherche les matrice  $M_u$  et  $M_v$  où  $M_u = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & U \end{bmatrix}$  et  $M_v = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & V \end{bmatrix}$  eq(2)

## F.Ferrieu Mueller anisotropie

de façon à transformer a et b en  $[\epsilon a(\text{ou } b) \ 0 \ 0]^T$  sous la forme

$U^T a = [\epsilon a \ 0 \ 0]^T$  et  $V^T b = [\epsilon b \ 0 \ 0]^T$  (voir [1] equation 8 et 9). Si M s'écrit suivant l'équation (1) alors la transformation  $M_u^T M M_v = M'$

Avec

$$M' = M_{RD} = \begin{bmatrix} M_{11} & \epsilon a & 0 & 0 \\ \epsilon b & M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & f \\ 0 & 0 & -f & c \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T+t) & \frac{1}{2}\epsilon(T-t) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\epsilon(T-t) & \frac{1}{2}(T+t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{Tt} \cos \delta & \sqrt{Tt} \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sqrt{Tt} \sin \delta & \sqrt{Tt} \cos \delta \end{bmatrix} \quad \text{eq(3)}$$

où  $M_{11} > 0$  et  $a^2 + c^2 + f^2 = M_{11}^2$

Notez que cette équation peut ensuite être décomposée suivant le produit d'un diattenuateur  $M_D$  et d'une matrice retard  $M_R$  soit :

$$M_{RD} = M_D M_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T+t) & \frac{1}{2}\epsilon(T-t) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\epsilon(T-t) & \frac{1}{2}(T+t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{Tt} & \sqrt{Tt} \\ 0 & 0 & -\sqrt{Tt} & \sqrt{Tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$$

Par identification on aura

$$T = M'_{11} + a \text{ et } t = M'_{11} - a$$

d'où en C#

```
double T = CM_prime[0, 0].Real + lengthOfa;
double t = CM_prime[0, 0].Real - lengthOfa;
```

ou le module de a est recalculé suivant l'expression

$$|a| = \sqrt{a[0]*a[0] + a[1]*a[1] + a[2]*a[2]}$$

soit par exemple

```
double lengthOfa = Math.Sqrt(a[0].Magnitude * a[0].Magnitude +
a[1].Magnitude * a[1].Magnitude + a[2].Magnitude * a[2].Magnitude);
```

On crée le vecteur  $e_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$  puis successivement  $h_1 = a - \epsilon a * e_1$  et  $h_2 = b - \epsilon b * e_1$

En remplaçant  $|h|$  (même expression que pour  $lengthOfa$ ) par  $\sqrt{2}|h|$ , pour ensuite calculer les matrices

$$H_i = I - \frac{h_i \otimes h_i}{|h_i|^2} \text{ avec } i=1,2 \text{ eq (4)}$$

Ce qui se traduit en C# par

```
Matrix_u = Analysis.Math.LinearAlgebra.OuterProduct(h1, h1T);
où h1T vecteur colonne représentant h1. Puis l'équation l'équation 4
s'écrit donc
```

```
Matrix_v[i, j] = Identit[i, j] - Matrix_u[i, j];
Puis finalement
```

```
// MHi eq(14)
```

```
Matrix_Hi = new NationalInstruments.ComplexDouble[4, 4];
Matrix_Hi[0, 0] = un;
for (i = 1; i < 4; i++){ for (j = 1; j < 4; j++){
Matrix_Hi[i, j] = Matrix_v[i - 1, j - 1];
}}
```

F.Ferrieu Mueller anisotropie

Et l'on bâtit de la même façon la matrice  $H_j$ . Les matrices  $M_u$  et  $M_v$  sont alors calculées grace à l'équation (17) de l'article de R. Ossikovski [1], c'est-à-dire  $M_u = M_{H_1} D$  et  $M_v = M_{H_2} D$  avec  $D$  étant la matrice  $D$  (4x4) determinant sign-flip. A ce niveau il suffit de recalculer  $M'$  à partir de  $M_U^T M M_V = M'$

Avant, il est intéressant de considérer les deux matrices retards  $M_U$  et  $M_V$  de façon plus général pour un retardeur on écrit :  $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R \end{bmatrix}$ , avec une matrice  $R$  orthogonale et unitaire de rotation 3x3 soit

$$R^T R = R R^T = I \text{ et } \det(R) = +1.$$

On définit son retard ou déphasage entre deux modes propres en réflexion ( ou transmission) telle que :  $\delta = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2} \text{tr}(M_R) - 1 \right]$  (eq(5) dans [1] R. Ossikovski JOSA 5N2473(2008))

Soit en C#

```
double tr = (0.5*(Analysis.Math.LinearAlgebra.Trace(Matrix_u).Real)-1.0); puis deltaU
= Math.Acos(tr) * 180.0 / Math.PI;
```

et les coordonnées sphériques sur la sphère de Poincaré :  
avec l'équation :

$$a_i = \frac{1}{2 \sin \delta} \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} R_{jk} \quad i=1,2,3$$

Qui utilise les symbole de Levi Civita ou encore plus simplement que l'on traduira par :  
ai[0] = 0.5 \* (Matrix\_u[2, 3].Real - Matrix\_u[3, 2].Real) / sinDeltaU;  
ai[1] = 0.5 \* (Matrix\_u[3, 1].Real - Matrix\_u[1, 3].Real) / sinDeltaU;  
ai[2] = 0.5 \* (Matrix\_u[1, 2].Real - Matrix\_u[2, 1].Real) / sinDeltaU;  
permet de calculer directement les retards  $\delta_U$  et  $\delta_V$  et les azimuths correspondants sur la sphere de Poincaré puisqu'à partir des coordonnées sphériques  $a_i$  on deduit azimuth  $\alpha$  et inclinaisons  $\chi$  soit par exemple pour l'azimuth :

$$\sin 2\alpha = a_2 \text{ et } \cos 2\alpha = a_1 \text{ avec } a_3 = \sin 2\chi$$

Ce qui s'écrira

```
double alfa = 0.5 * Math.Atan2(ai[1], ai[0]) * 180.0 / Math.PI;
```

Le programme considère alors les Equations (31) et (32) de la reference[1] à partir de la matrice  $M_{RD}$  pour recalculer les valeurs de l'ellipsometrie,  $\psi$  et  $\Delta$  apres avoir calculer  $M_{RD}$

$$M_{RD} = M_{\psi\Delta} = \frac{1}{2} (T+t) \begin{bmatrix} 1 & -\cos 2\psi & 0 & 0 \\ -\cos 2\psi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\psi \cos \Delta & \sin 2\psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -\sin 2\psi \sin \Delta & \sin 2\psi \cos \Delta \end{bmatrix}$$

on utilise les equations :

$$\sin 2\psi = \sqrt{\frac{1}{2} (M_{33}^2 + M_{34}^2 + M_{43}^2 + M_{44}^2) / M_{11}^2}$$

puis (31) [1],

$$\cos \Delta = \frac{1}{2} (M_{33} + M_{44}) / M_{11} \sin 2\psi$$

et

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$(32) [1], \sin \Delta = \frac{1}{2} (M_{34} - M_{43}) / M_{11} \sin 2\psi$$

On peut faire un calcul équivalent à partir de  $M'$  et l'équation (3) de ce rapport ,  
équation (21) de [1], soit ce qui se traduit par

$$\cos 2\psi = \varepsilon \frac{t-T}{T+t}, \sin 2\psi = 2 \frac{\sqrt{Tt}}{T+t} \text{ et } \delta \equiv \Delta$$

Soit en c#

```
cos2Psi=eps*(t-T)/(T+t); // ici eps represente ε
sin2Psi=2.0*Math.Sqrt(T*t)/(T+t); // eq (21)de la ref JOSA_RO
Psi1 = 0.5*Math.Atan2(sin2Psi, cos2Psi) * 180.0 / Math.PI;
cosdelta=CM_prime[2, 2].Real/Math.Sqrt(T*t); // eq(11) de la ref JOSA_RO
sindelta = CM_prime[2, 3].Real / Math.Sqrt(T * t)
delta1 = Math.Atan2(sindelta, cosdelta) * 180.0 / Math.PI;
Avec ε = -1 ψ est compris entre 0 et 45 degré s et +1 entre 45 et 90 degré s.
```

La page suivante est une copie d'écran du résultat donné par le programme C# utilisant le formalisme que nous venons de décrire et avec la matrice de Mueller proposé par R. Ossikovski.

The screenshot shows a software interface for matrix operations. The window title is "Linear Algebra/Matrix Operations". It features a "Menu" bar and an "Input Matrices" section with a large empty box for matrix input. Below this, there are two matrices, A and B, displayed as text boxes. Matrix A is a 4x4 matrix with values: 0.9997, 0.0620, 0.0247, 0.7699; -0.2394, 0.3734, 0.4407, -0.3558; 0.3258, 0.5146, -0.3041, 0.3868; -0.6550, 0.0182, -0.3479, -0.8410. Matrix B is a 2x2 matrix with values: 2.00, 12.00; 10.00. Below the matrices, there are input fields for "Azimuth U" (60.78), "Azimuth V" (45.85), "retardance U et V" (Delta\_U: 87.08, Delta\_V: 94.66), "T" (1.77), and "t" (0.230). There are also checkboxes for "tab separateur" and "Epsilon=-1", and a "Norm Type" dropdown set to "2-norm". A "Compute" button is located at the bottom right. On the right side of the interface, there is a "Household decomposition of Matrix A" table with 4 columns and 4 rows of numerical values. Below the table is a plot area with axes from 0 to 10.

	Column1	Column2	Column3	Column4
▶	0.9997 +	-0.7728 + 0.0	0.0000 + 0.00	0.0000 + 0.00
	-0.7697 + 0.0	0.9942 + 0.00	0.0017 + 0.00	-0.0064 + 0.0
	0.0000 + 0.00	0.0032 + 0.00	-0.6002 + 0.0	0.2141 + 0.00
	0.0000 + 0.00	-0.0030 + 0.0	-0.2165 + 0.0	-0.5952 + 0.0

### Cas a=b=0

On a cherché une matrice une fois transformée de la forme de l'équation (3) pour a et b nuls. On réécrit donc la matrice expérimentale :

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$M' = \begin{bmatrix} M_{11} & \varepsilon a = 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon b = 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & f \\ 0 & 0 & -f & c \end{bmatrix}$$

Et la matrice non dépolarisante  $M$  s'explique suivant les éléments de Jones ( cf Azzam, Bashara page 149) :

$$M = \begin{bmatrix} 0.5*(E_1+E_2+E_3+E_4) & 0.5*(E_1-E_2-E_3+E_4) & F_{13}+F_{42} & -G_{13}-G_{42} \\ 0.5*(E_1-E_2+E_3-E_4) & 0.5*(E_1+E_2-E_3-E_4) & F_{13}-F_{42} & -G_{13}+G_{42} \\ F_{14}+F_{32} & F_{14}-F_{32} & F_{12}+F_{34} & -G_{12}+G_{34} \\ G_{14}+G_{32} & G_{14}-G_{32} & G_{12}+G_{34} & F_{12}-F_{34} \end{bmatrix}$$

Avec  $E_i = |T_{ij}|^2$ ,  $F_{ij} = F_{ji} = \Re(T_i^i T_j)$ ,  $G_{ij} = -G_{ji} = \Im(T_i^i T_j)$  et  $i, j = 1, 2, 3, 4$  et  $T_1, T_2, T_3, T_4$  représentent les éléments correspondant  $J_{ij}$  les  $J_{11}, J_{22}, J_{12}$ , de la matrice de Jones. On doit donc avoir (eq (10) référence [1]),

$$M' = M_U^T M M_V$$

Par simple identification cela impose pour la première colonne (vecteur **a**)

$$F'_{14} + F'_{32} = G'_{14} + G'_{32} = 0$$

et la première ligne (vecteur **b**)

$$F'_{13} + F'_{42} = G'_{13} + G'_{42} = 0 .$$

On doit avoir aussi :

$$\varepsilon a = 0.5*(E'_1 - E'_2 + E'_3 - E'_4) \text{ et } \varepsilon b = 0.5*(E'_1 - E'_2 - E'_3 + E'_4)$$

On recherche les relations équivalentes en termes des coefficients de Jones

$$T_1'^* i T_4' = -T_3'^i T_2'^i \text{ et } T_3'^* i T_1' = -T_2'^i T_4'^i$$

La multiplication de ces deux termes aboutit à la relation

$$\left( |T_1'|^2 - |T_2'|^2 \right) T_3'^i T_4' = 0$$

R. Ossikovski, [1], envisage alors les cas  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ .

On a

$\left( |T_1'|^2 - |T_2'|^2 \right) T_3'^i T_4' = 0$  deux solutions possibles  $|T_1'| = |T_2'|$  et alors cela entraîne  $a = b = 0$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ en conséquence on doit écrire  $T_3' = T_4' = 0$  .

$$\text{Soit } M' = \begin{bmatrix} 0.5(E'_1 + E'_2) & 0.5(E'_1 - E'_2) & 0 & 0 \\ 0.5(E'_1 - E'_2) & 0.5(E'_1 + E'_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F'_{12} & -G'_{12} \\ 0 & 0 & G'_{12} & F'_{12} \end{bmatrix}$$

On identifie avec la forme de  $M'$  d'où  $M'_{11} = 0.5 \varepsilon$

La relation  $a^2 + c^2 + f^2 = M_{11}^2$  se traduit ici par  $F_{12}'^2 + G_{12}'^2 + \frac{1}{4}(E'_1 - E'_2)^2 = M_{11}'^2$  et on a démontré la relation  $a = b$ . On peut donc conclure

F.Ferrieu Mueller anisotropie

*Si un des deux vecteurs est nuls et pas l'autre la matrice est nécessairement dépolarisante*

Le cas  $a=b=0$

on a donc pour M :

$$M = \begin{bmatrix} 0.5*(E_1+E_2+E_3+E_4) & 0.5*(E_1-E_2-E_3+E_4) & F_{13}+F_{42} & -G_{13}+G_{42} \\ 0.5*(E_1-E_2+E_3-E_4) & 0.5*(E_1+E_2-E_3-E_4) & F_3-F_{42} & -G_{13}+G_{42} \\ F_{14}+F_{32} & F_{14}-F_{32} & F_{12}+F_{34} & -G_{12}+G_{34} \\ G_{14}+G_{32} & G_{14}-G_{32} & G_{12}+G_{34} & F_{12}-F_{34} \end{bmatrix}$$

Ce qui entraine

$E_1=E_2$  et  $E_3=E_4$  équivalentes avec  $T_1=T_2$  et  $T_3=T_4$  de même que les relations précédemment définies, c.à.d. :  $T_1^i T_4 = -T_3^i T_2$  et  $T_3^i T_1 = -T_2^i T_4$ .

Soit, finalement pour M :

$$M = \begin{bmatrix} 0.5*(E_1+E_2+E_3+E_4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5*(E_1+E_2-E_3-E_4) & F_3-F_{42} & -G_{13}+G_{42} \\ 0 & F_{14}-F_{32} & F_{12}+F_{34} & -G_{12}+G_{34} \\ 0 & G_{14}-G_{32} & G_{12}+G_{34} & F_{12}-F_{34} \end{bmatrix}$$

Soit

$$E_1=E_2 \text{ et } E_3=E_4, F_{13}=-F_{42} \text{ et } G_{13}=G_{42}, F_{14}=-F_{32} \text{ et } G_{14}=G_{32}$$

La matrice M devient ainsi explicitement égale à

$$M = \begin{bmatrix} (E_1+E_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (E_1-E_3) & F_{13}-F_{42} & -G_{13}+G_{42} \\ 0 & F_{14}-F_{32} & F_{12}+F_{34} & -G_{12}+G_{34} \\ 0 & G_{14}-G_{32} & G_{12}+G_{34} & F_{12}-F_{34} \end{bmatrix}$$

Puis ensuite sous forme partitionnée

$$M = (E_1+E_3) \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

Et N est une sous-matrice 3x3, Si N est sous la forme

$$N = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Avec les propriétés d'orthogonalité de ces vecteurs  $r_i, i=1,3$ ,

$$\begin{aligned} r_1 &= [E_1-E_3 \quad F_{13}+F_{34} \quad -G_{13}+G_{42}] \\ r_2 &= [F_{14}-F_{32} \quad F_{12}+F_{34} \quad -G_{12}+G_{34}] \\ r_3 &= [G_{14}-G_{32} \quad G_{12}+G_{34} \quad F_{12}-F_{34}] \end{aligned}$$

avec

$$r_i \cdot r_j = 0 \text{ et } r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

Par exemple on considère le produit scalaire  $r_2 \cdot r_3 = 0$

$$\text{Si } (E_1+E_3)^2 r_2 \cdot r_3 = (F_{14}-F_{32})(G_{14}-G_{32}) + (F_{12}+F_{34})(G_{12}+G_{34}) + (F_{12}-F_{34})(-G_{12}+G_{34}) = -2(G_{32}F_{14}+F_{32}G_{14}) + 2(G_{12}F_{34}+F_{12}G_{34}) = -2\Im(T_3^i T_2 T_1^i T_4) + 2\Re(T_3^i T_2 T_1^i T_4)$$

De la même façon, on peut calculer le module au carré du vecteur  $r_1$  multiplié par le facteur

$$(E_1+E_3)^2, \text{ on obtient :}$$

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$(E_1+E_3)^2 r_1^2 = (E_1-E_3)^2 + (F_{13}+F_{34})^2 + (-G_{13}+G_{42})^2 = (E_1-E_3)^2 + F_{13}^2 + G_{13}^2 + F_{42}^2 + G_{42}^2 - 2(F_{13}F_{42} + G_{13}G_{42}) = (E_1-E_3)^2 + F_{13}^2 + G_{13}^2 + F_{42}^2 + G_{42}^2 - 2(F_{13}F_{42} + G_{13}G_{42}) = (E_1-E_3)^2 + F_{13}^2 + G_{13}^2 + F_{42}^2 + G_{42}^2 - 2(F_{13}F_{42} + G_{13}G_{42})$$

On démontre ainsi que la matrice  $N$  est ainsi une matrice orthogonale (ou de rotation) proportionnelle à une matrice retard par un facteur  $(E_1+E_3)$  où encore plus généralement, on peut montrer qu'un retardeur général  $M_R$  peut se transformer en  $M_{LH} = M_V^T M_R M_V$  où la matrice  $M_{LH}$  est un retardeur linéaire horizontal de la forme :

$$M_{LH} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix}$$

Par identification avec la forme canonique de décomposition

$$M = M_U M_{RD} M_V^T$$

on doit avoir les relations suivantes

$$M_{LH} = M_V^T M_R M_V$$

$$M_U = M_V$$

$$M_{RD} = (E_1+E_3) M_{LH}$$

Soit en particulier  $M_D = (E_1+E_3)I$ , avec  $I$  l'opérateur identité  $I$  dans la décomposition de façon à retrouver  $M_{RD} = M_R M_D$  (cf équation (13) référence [1]).

Conclusions :

la transformation  $M_U^T M M_V$  porte une matrice arbitraire matrice  $M$  donnée par

$$\begin{vmatrix} 0.5*(E_1+E_2+E_3+E_4) & 0.5*(E_1-E_2-E_3+E_4) & F_{13}+F_{42} & -G_{13}+G_{42} \\ 0.5*(E_1-E_2+E_3-E_4) & 0.5*(E_1+E_2-E_3-E_4) & F_3-F_{42} & -G_{13}+G_{42} \\ F_{14}+F_{32} & F_{14}-F_{32} & F_{12}+F_{34} & -G_{12}+G_{34} \\ G_{14}+G_{32} & G_{14}-G_{32} & G_{12}+G_{34} & F_{12}-F_{34} \end{vmatrix}$$

Dans la forme  $M'$  de l'équation :

$$M' = \begin{vmatrix} 0.5(E'_1+E'_2) & 0.5(E'_1-E'_2) & 0 & 0 \\ 0.5(E'_1-E'_2) & 0.5(E'_1+E'_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F'_{12} & -G'_{12} \\ 0 & 0 & G'_{12} & F'_{12} \end{vmatrix}$$

Si  $a=b=0$  on peut obtenir l'expression

$$M_{LH} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix}$$

Qui est une expression particulière de

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$M' = \begin{vmatrix} 0.5(E'_1 + E'_2) & 0.5(E'_1 - E'_2) & 0 & 0 \\ 0.5(E'_1 - E'_2) & 0.5(E'_1 + E'_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F'_{12} & -G'_{12} \\ 0 & 0 & G'_{12} & F'_{12} \end{vmatrix}$$

En utilisant la transformation d'une seule transformation retard  $M_V^T M M_V$

#### Références

[1] R : Ossikovski J.O.S.A. vol 25,N°2,473-482(feb. 2008)



## Décomposition en somme des Matrices de Mueller ;

### 1. L'approche donnée dans le papier de R.Ossikovski

La décomposition en somme proposée par S.R. Cloude[1],[ ref 20 de R.Ossikovski JOSA 25,2,473], (voir commentaires sur la matrice de covariance donne une estimation à partir de la matrice mesurée car toute matrice de Mueller peut être décomposée en jusqu'à 4 matrice non dépolarisantes :  $M_{ij}, i=0, 1, 2, 3$

$$M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice de covariance, [1], définit comme

$$C = \sum_{j,k=1}^4 M_{jk} (\sigma_j \otimes \sigma_k)$$

À partir du produit de kronecker des matrices de Pauli .Pour toute matrice non dépolarisante, les composantes  $M_i$  peuvent être calculées à partir de

$$M_i^{(jk)} = 1/4 \text{tr}[C_i (\sigma_j \otimes \sigma_k)]$$

Où on recalcule les  $C_i$  à partir de des vecteurs propres normalisés de la matrice de cohérence  $C$ . Suivant [1], il écrit  $C_i = e_i e_j^{+\dot{i}\dot{j}}$ , vecteurs propres associés à  $C$ . On a clairement toutes les valeurs propres nulles sauf une dans le cas non dépolarisant pure. Cependant si la relation :  $\lambda_1 \gg \lambda_2, \lambda_3$  pour une matrice  $M$  déterminée expérimentalement, alors peut être analysée et  $\lambda_1 M_1$  l'estimation non dépolarisante de la matrice expérimentale  $M$ . Ce calcul est en fait un filtrage des valeurs expérimentales qui ne sera plus valable dans l'hypothèse d'une matrice  $M$  dépolarisante. Le programme de R. Ossikovski figure en annexe (Matlab). Nous l'avons simplement transcrit en C# pour pouvoir faire des comparaisons des résultats.

Deux autres études publiées existent principalement que nous avons examinées. Il s'agit de celle de S.R. Cloude et J.Gil dans [2][ European Phys. J. Appl. Phys. 40, 1-47(2007).

J. Gil utilise la matrice  $L$  qui projette les vecteurs de Stockes sur la matrice de polarisation (ref [3] équations (163) et (164)). : où encore dénommée Cohérence matrix

$$L = \begin{bmatrix} \langle t_0 t_0^i \rangle & \langle t_0 t_1^i \rangle & \langle t_1 t_0^i \rangle & \langle t_1 t_1^i \rangle \\ \langle t_0 t_2^i \rangle & \langle t_0 t_3^i \rangle & \langle t_1 t_2^i \rangle & \langle t_1 t_3^i \rangle \\ \langle t_2 t_0^i \rangle & \langle t_2 t_1^i \rangle & \langle t_3 t_0^i \rangle & \langle t_3 t_1^i \rangle \\ \langle t_2 t_2^i \rangle & \langle t_2 t_3^i \rangle & \langle t_3 t_2^i \rangle & \langle t_3 t_3^i \rangle \end{bmatrix}$$

Ces éléments peuvent être regroupés pour construire la matrice de cohérence  $H$  dont les éléments sont définis par  $h_{kl} \equiv \frac{1}{2} \langle t_k t_l^i \rangle ; k, l = 1, 2, 3$ . Les relations explicites entre  $M$  et  $H$  sont suivant J.J.Gil, sont données par

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$H = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} m_{00} + m_{01} + i m_{10} + m_{11} & m_{20} + m_{21} & m_{02} + m_{12} & m_{22} - m_{33} \\ -i(m_{30} + m_{31}) & -i(m_{03} + m_{13}) & -i(m_{23} + m_{32}) & \\ m_{02} + m_{12} & m_{00} + m_{01} & m_{22} + m_{33} & m_{02} - m_{12} \\ +i(m_{03} + m_{13}) & -m_{10} - m_{11} & -i(m_{23} - m_{32}) & -i(m_{03} - m_{13}) \\ m_{20} + m_{21} & m_{22} + m_{33} & m_{00} - m_{01} & m_{20} - m_{21} \\ +i(m_{30} + m_{31}) & +i(m_{23} - m_{32}) & +m_{10} - m_{11} & -i(m_{30} - m_{31}) \\ m_{22} - m_{33} & m_{02} - m_{12} & m_{02} - m_{21} & m_{00} - m_{01} \\ +i(m_{23} + m_{32}) & +i(m_{03} - m_{13}) & +i(m_{30} - m_{31}) & -m_{10} + m_{11} \end{pmatrix}$$

Et réciproquement nous avons :

$$M = \begin{pmatrix} h_{00} + h_{11} & h_{00} - h_{11} & h_{01} + h_{10} & -i(h_{01} - h_{10}) \\ +h_{22} + h_{23} & +h_{22} - h_{33} & +h_{23} + h_{32} & -i(h_{23} - h_{32}) \\ h_{00} + h_{11} & h_{00} - h_{11} & h_{01} + h_{10} & -i(h_{01} - h_{10}) \\ -h_{22} - h_{33} & -h_{22} + h_{33} & -h_{23} - h_{32} & +(h_{23} - h_{32}) \\ h_{02} + h_{20} & h_{02} + h_{20} & h_{03} + h_{30} & -i(h_{03} - h_{30}) \\ +h_{13} + h_{31} & -h_{13} - h_{31} & +h_{12} + h_{21} & +i(h_{12} + h_{21}) \\ i(h_{02} - h_{20}) & i(h_{02} - h_{20}) & i(h_{03} - h_{30}) & h_{03} + h_{30} \\ +i(h_{13} - h_{31}) & -i(h_{13} - h_{31}) & +i(h_{12} - h_{21}) & -h_{12} - h_{21} \end{pmatrix}$$

Dans ce contexte l'équation (26) de la référence [3][ JOSA,17,2,328,J. Gil(2000)] , devient

$$C \equiv H = \frac{1}{4} \sum_{k,l=0}^3 m_{kl} E_{kl}$$

où suivant [2], les  $E_{kl}(k, l=0,1,2,3)$  correspondent aux 16 matrice unité de Dirac Hermitique :

$$E_{kl} = \sigma_k \otimes \sigma_l$$

De telle sorte que  $m_{kl} = \text{Tr}(E_{kl} H)$ .

En fait il est possible de classifier les matrices de Mueller suivant le rang de H, c'est-à-dire, suivant le nombre de ses valeurs propres non nulles. H correspond à une matrice de Mueller pure lorsque une seule des ses valeurs propres est non nulle.

Comme H est Hermitien, on peut la diagonaliser par une transformation de similarité à l'aide d'une matrice unitaire U de sorte que :

$$H = U \Lambda U^{-1}$$

¶ est la matrice diagonale des valeurs propres  $D(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , avec  $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ .

Aussi il peut être écrit :

$$H = \lambda_0 U D(1, 0, 0, 0) U^{-1} + \lambda_1 U D(0, 1, 0, 0) U^{-1} + \lambda_2 U D(0, 0, 1, 0) U^{-1}$$

## F.Ferrieu Mueller anisotropie

Qui est une combinaison linéaire avec des coefficients non négatifs, chacune avec une matrice diagonale dont une seule valeur est égale à 1. En retransformant cette équation dans le cas du formalisme de Mueller on obtient :  $M = \lambda_0 N_0 + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \lambda_3 N_3$ . Ici on retrouve donc un formalisme similaire à la description de R. Ossikovski et celui défini par S.R. Cloude de façon plus synthétique mais qui aboutit à une décomposition. Toute matrice de Mueller peut être décomposée de une à quatre Mueller matrice pure et pondéré par les valeurs propres de H. Cette décomposition fournit une interprétation physique analogue à la décomposition d'une matrice de polarisation en tant qu'une superposition de 2 faisceaux polarisés orthogonalement, incohérents, linéairement indépendants et dont les intensités sont ses deux valeurs propres. A l'aide du programm on peut donc évaluer la correction de l'estimation faite ds la reference [1]. Suivant l'exemple numérique suivant[1]

$$M = \begin{bmatrix} 0.9997, 0.0620, 0.0247, 0.7699; \\ -0.2394, 0.3734, 0.4407, -0.3558; \\ 0.3258, 0.5146, -0.3041, 0.3868; \\ -0.6550, 0.0182, -0.3479, -0.8410; \end{bmatrix}$$

On obtient

The screenshot shows the 'Linear Algebra/Matrix Operations' software interface. The main window displays a menu bar, a date dropdown (mardi, 15. avril 2008), and a 'Parallel decomposition of Matrix M' window. The 'Parallel decomposition' window displays a table with 4 columns (Column1 to Column4) and 4 rows of numerical values. Below the table is a plot area with axes from 0 to 10. The main window also shows input matrices A and B, and various control fields like 'Azimuth U', 'Azimuth V', 'retardance U et V', 'Delta\_U', 'Delta\_V', 'entropy', 'tab separateur', 'Epsilon=-1', 'M', 'Psi', 'M', and 'Compute'.

Avec une entropy de 0.0251 qui sera explicitée plus tard. En utilisant cette estimation de vrai matrice non depolarisante on obtient ensuite les resultats cités dans la reference [1]. C'est-à-dire Pour la matrice  $M_U$  :

The screenshot shows the 'Household decomposition of Matrix A' window. It displays a table with 4 columns (Column1 to Column4) and 4 rows of numerical values. The first row is highlighted.

	Column1	Column2	Column3	Column4
▶	1.000 + 0.000i	0.000 + 0.000	0.000 + 0.000	0.000 + 0.000
	0.000 + 0.000	0.312 + 0.000	-0.421 + 0.00	-0.852 + 0.00
	0.000 + 0.000	-0.421 + 0.00	0.742 + 0.000	-0.521 + 0.00
	0.000 + 0.000	0.852 + 0.000	0.521 + 0.000	0.054 + 0.000

F.Ferrieu Mueller anisotropie

La matrice  $M_V$  :

	Column1	Column2	Column3	Column4
▶	1.000 + 0.000i	0.000 + 0.000	0.000 + 0.000	0.000 + 0.000
	0.000 + 0.000	-0.083 + 0.00	-0.031 + 0.00	-0.996 + 0.00
	0.000 + 0.000	-0.031 + 0.00	0.999 + 0.000	-0.029 + 0.00
	0.000 + 0.000	0.996 + 0.000	0.029 + 0.000	-0.084 + 0.00

Et enfin  $M_{RD}$ =

0.9981 +	-0.7704 + 0.0	0.0000 + 0.00	0.0000 + 0.00
-0.7704 + 0.0	0.9981 + 0.00	0.0000 + 0.00	0.0000 + 0.00
0.0000 + 0.00	0.0000 + 0.00	-0.5963 + 0.0	0.2172 + 0.00
0.0000 + 0.00	0.0000 + 0.00	-0.2172 + 0.0	-0.5963 + 0.0

Ainsi que les valeurs d'azimuth, et retard associés à ces deux matrices.

Azimuth U	60.73	Azimuth V	45.82
retardance U et V		T	1.77
Delta_U	86.92	t	0.228
Delta_V	94.84		
<input checked="" type="checkbox"/> entropy		M	Ψ 19.74
<input type="checkbox"/> tab separateur	2-norm	Norm Type	Δ 159.98
<input type="checkbox"/> Epsilon=-1			

C'est donc exactement les résultats trouvés par R.Ossikovski[1]. L'ensemble de ces résultats peuvent avoir une approche spectroscopiques, à savoir, après lecture des valeurs des matrices  $M$  à chaque longueur d'ondes, chaque matrice est décomposée de façon à corriger les valeurs de  $\Psi$  recalculées à partir des éléments des matrices de Mueller. C'est en fait le sens de la référence [3]. L'application d'une telle analyse est donc suivant leurs auteurs de pouvoir éliminer tout effet de biréfringence lié à des hublots situés de part et d'autre de l'échantillon mesuré (cellule in situ). Dans un cas où l'on considère la matrice de Mueller d'un seul diélectrique, cette décomposition peut sembler bien ne pas être forcément unique.

## 2. Entropie de polarisation dans un système optique

Un autre aspect aussi intéressant apparaît dans le concept de l'analyse de ces matrices à travers cette décomposition en fonction de ses valeurs propres. L'ensemble de cette approche introduisant le concept statistique d'entropie de polarisation se base sur la décomposition en valeurs propres en supposant un ensemble des valeurs propres non nulles (au plus  $N=4$ ). Ces valeurs sont associées aux états de polarisation. Cette description fournit une estimation statistique de l'état de polarisation de la lumière réfléchi et diffusée. On définit au sens de Neuman [Kim, Mandel, and Wolf J.O.S.A. 4,433(1987)] une entropie  $H$ , telle que

$$H = - \sum_{i=1}^N P_i \log_N P_i \text{ où } P_i = \lambda_i / \sum_j \lambda_j.$$

Et les probabilités  $P_i$  apparaissent donc comme densité de population avec une somme des populations égale à l'unité :

$$\sum_{i=1}^N P_i \equiv 1.$$

Plusieurs études exhaustives existent dans la littérature du point de vue théorique et appliquées et ce principalement dans deux domaines. Le problème de la rugosité a été principalement abordé par la communauté de la polarimétrie radar ( par exemple Shane R. Cloude est à l'université de Nantes et C.Brosseau (est de l'Université de Brest est un des pionniers en matière d'entropie optique. Du côté de l'optique des couches minces, on en est pas non plus à un début malgré plusieurs travaux précurseurs. Ces publications se sont intéressées au problème de dépolarisation et ce depuis Azzam, Bashara (PRB,5,4721)(1972) et ainsi la dernière publication de R. Ossikovski [1] intervient dans ce domaine. Peu de gens de l'ellipsométrie des couches minces, ( ils se contentent bien souvent de l'approximation de D. Aspnes avec la théorie EMA valide dans le visible et pour des rugosités petite devant la longueur d'onde), connaissent le potentiel de cette technique. Les travaux publiés débutent depuis cette période avec les photopolarimètre à division d'amplitude [ S.Krishana,P.C.Nordine Appl. Optics ,33,19,4184(1994)] comme par exemple celui entre le LPCIM et le Leti. Il est orienté vers de la diffraction « pure et dure » d'objet diffractant de type réseaux périodiques. La principale source de polarimètre est ceux réalisés à partir des brevet de B. Compain/B.Drevillon, un appareil commercialisé par Jobin Yvon D'autres appareils existent dans le monde mais encore au stade du laboratoire. Les ellipsomètres sont aussi équipés de compensatrices, cependant avec la restriction d'un nombre limité des  $4 \times 4 = 16$  éléments de la matrice de Mueller<sup>1</sup>.

Dans la littérature , on note le travail de David A. Ramsey, qui a le mérite d'avoir publié des valeurs numériques de matrices de Mueller largement exploitées dans différents articles. Elles correspondent à des métaux avec différentes rugosités. Malheureusement il s'agit de surfaces présentant une anisotropie et recouvertes de 315nm d'une couche de MgF<sub>2</sub> La décomposition a donc été testée sur différentes classes de matrices de Mueller publiées dans la littérature « Concept of Polarization Entropy in Optical scattering S.R.Cloude and E.Pottier Optical Engineering,34,6,1599(1995). On a repris les matrices données par les équations (46) M1,(47)M2 et (48) M3 Pour M3 on a

The screenshot shows a software interface with two input fields on the left and a table on the right. The left fields contain the values 0.4621 and 0.3232, with the label 'Anisotro' partially visible. The table on the right is titled 'Parallel decomp' and contains the following values:

Parallel decomp	
:	
▶	0.0194
	0.0701
	0.1371
	1.0000

Qui représentent les valeurs propres normalisées  $\lambda_i$  et sur la gauche respectivement la valeur de l'entropie (0.4621) et l'anisotropie entre les valeurs propres suivantes. Données dans l'article : M3=> I1=1,I2=0.1371,I3=0.0701,I4=0.0194. On obtient alors pour k :

<sup>1</sup> Cependant la cote instrument sera traitée ultérieurement dans ce rapport

▶	1.000(0.0)
	1.167(58.6)
	0.675(17.0)
	2.932(-112.5)
*	

On constate que ce sont les valeurs données par Claude pour  $S_3$  (equation (49)), et non pour k. Il existe bien une différence avec les résultats de Shane R. Cloude, ce qui nous a amené à considérer les publications de S.R. Cloude de façon plus complète

### 3. Le calcul de S.R. Cloude

(S.R. Cloude et E.Pottier donnent une expression différente de la forme suivante pour M et H

$$M = \begin{bmatrix} A_0+B_0 & C+N & H+L & I+F \\ C-N & A+B & E+J & K+G \\ H-L & E-J & A-B & M+D \\ I-F & K-G & M-D & A_0-B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

M possède une relation avec une matrice de Jones S. Alors on a la matrice de cohérence correspondante

$$H \equiv T = \begin{bmatrix} A_0+A & C-iD & H+iG & I-iJ \\ C+iD & B_0+B & E+iF & K-iL \\ H-iG & E-iF & B_0-B & M+i \\ I+iJ & K+iL & M-i & A_0-A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

On retrouve également ces deux définitions dans l'article de A. Aiello et Woerdmann les équations (108) et (109) et aussi d'autres publications telles que A.V. Gopala RAO, K.S. Malleth (Journal of Modern Optics 1998,45,5,989-999 et C.V.M. Van der Mee J.Math.Phys.34,(11)5072-5089.. Il est facile à partir de ces deux définitions, de retrouver les relations entre H et M, en comparant les éléments respectifs, soit par exemple :

$$m_{00} \equiv A_0+B_0 = (A_0+A) + (B_0+B) + (B_0-B) + (A_0-A) = h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}$$

$$t_{23} \equiv h_{23} = M - i = \frac{1}{2}i \text{ et d'autre part } T = H = T^\dagger \text{ Qui peut encore s'expliciter comme :}$$

$$m_{00} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [h_{ij}]$$

et l'on verra par la suite l'implication de la théorie des groupes dans la signification de cette dernière relation, impliquant les matrices 4x4 de Dirac modifiées. Dans ce cas il est aisé de procéder de la façon suivante à partir de la matrice expérimentale M, calculer les éléments de H (identique à  $T_c$  suivant S.R. Cloude et E. Pottier). Les relations que l'on déduit sont similaires à celle de J. Gil, mais il y a des différences dans les expressions données lorsque l'on considère plusieurs publications.

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$H \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_{00}+m_{01} & m_{01}+m_{10} & m_{02}+m_{20} & m_{03}+m_{30} \\ +m_{10}+m_{11} & +i(m_{23}-m_{32}) & +i(m_{13}+m_{31}) & +i(m_{12}-m_{21}) \\ m_{01}+m_{10} & m_{00}+m_{22} & m_{11}-m_{22} & m_{13}+m_{31} \\ -i(m_{23}-m_{32}) & -m_{33}-m_{44} & -i(m_{23}+m_{32}) & -i(m_{02}-m_{20}) \\ m_{02}+m_{20} & m_{12}+m_{21} & m_{00}+m_{11} & m_{02}-m_{12} \\ +i(m_{13}-m_{31}) & +i(m_{30}-m_{03}) & -m_{22}-m_{33} & +i(m_{03}-m_{13}) \\ m_{03}+m_{30} & m_{13}+m_{31} & m_{23}-m_{32} & m_{00}-m_{11} \\ +i(m_{12}-m_{21}) & +i(m_{02}-m_{20}) & -i(m_{10}-m_{01}) & -m_{22}+m_{33} \end{pmatrix}$$

Et une expression similaire pour la matrice M

$$M = [f(h_{ij})] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_{00}+h_{11} & h_{01}+h_{10} & h_{00}+h_{11} & h_{02}+h_{20} & h_{03}+h_{30} \\ +h_{22}+h_{33} & +i(h_{23}+h_{32}) & -h_{22}-h_{33} & i(h_{31}-h_{13}) & -i(h_{12}-h_{21}) \\ h_{02}+h_{20} & h_{12}+h_{21} & h_{00}-h_{11} & h_{12}+h_{21} & h_{13}+h_{31} \\ -i(h_{13}-h_{31}) & +i(h_{03}-h_{30}) & +h_{22}-h_{33} & -i(h_{03}-h_{30}) & -i(h_{02}-h_{20}) \\ h_{03}+h_{30} & h_{13}+h_{31} & h_{23}+h_{32} & h_{23}+h_{32} & h_{00}+h_{33} \\ +i(h_{12}-h_{21}) & +i(h_{02}-h_{20}) & +i(h_{01}-h_{10}) & -h_{11}-h_{22} & \end{pmatrix}$$

Il procède alors à une décomposition en vecteurs propres et valeurs propres telle une somme de 4 valeurs propres positives et réelle et chaque vecteur propre correspond a un vecteur unique  $k$ , ( à un facteur de phase près ) et donc une seule matrice de Jones de diffraction  $S$ .

On a donc une un theoreme de decomposition en 4 composantes cibles, pondérée par les valeurs propres associées.  $H \equiv [T_c] = \lambda_0 [T_{c0}] + \lambda_1 [T_{c1}] + i \lambda_2 [T_{c2}] + i \lambda_3 [T_{c3}] + i$

Les poids  $\eta$  sont les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $[T_c]$  toutes positives et réelles.

Il y a au maximum quatres composantes cibles ( données par les vecteurs propres orthogonaux de  $[T_c]$  qui est associée à la matrice la plus générale  $\langle M \rangle$ ).

La contrainte sur  $\langle [M] \rangle$  est quelle possède une seule et unique matrice de Jones associée. Dans ce cas  $[T_c]$  a seulement des valeurs propres positives et non nulles.

F.Ferrieu Mueller anisotropie

Enfin il définit l'entropie du système de façon similaire à la définition donnée auparavant ici

$$H = - \sum_{i=1}^N P_i \log_N P_i \text{ où } P_i = \lambda_i / \sum_j \lambda_j. \text{ Avec } N=4.$$

On a dans ce cas une entropie H nulle avec une cible non depolarisante et une seule valeurs propre. On peut ainsi definir le terme . Depolarisation comme pas de changement dans le degre de polarisation. Dans le cas contraire une entropie H egale à l'unité signifie une polarisation aleatoire pour toute les etats de polarisation d'une onde incidente.

On peut alors verifier les application numériques données par les auteurs Pour la matrice M par exemple (eq5.1) de S.R.Cloude dans « Group Theory and polarisation algebra ».Optik,75,126-36(1986). Le vecteur k est recalculé ensuite à partir des vecteurs propres suivant les expressions pour k :

$$k_0 = \frac{1}{2} (S_{xx} + S_{yy}), \text{ ect } \dots$$

$M = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.016 \\ 0.0010 & 0.011 & 0.990 & 0.008 \\ -0.005 & -0.003 & -0.003 & 1.006 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 1.000(0^\circ) \\ 0.003(90^\circ) \\ 0.005(-62^\circ) \\ 0.003(-116^\circ) \end{bmatrix}$																									
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Column1</th> <th>Column2</th> <th>Column3</th> <th>Column4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1998.000(0.00)</td> <td>5.500(-90.00)</td> <td>10.735(62.24)</td> <td>6.042(114.4)</td> </tr> <tr> <td>5.500(90.00)</td> <td>2.000(0.00)</td> <td>6.042(24.44)</td> <td>8.201(37.57)</td> </tr> <tr> <td>10.735(-62.2)</td> <td>6.042(-24.44)</td> <td>8.000(180.00)</td> <td>2.500(0.00)</td> </tr> <tr> <td>6.042(-114.4)</td> <td>8.201(-37.57)</td> <td>2.500(0.00)</td> <td>8.000(0.00)</td> </tr> </tbody> </table>	Column1	Column2	Column3	Column4	1998.000(0.00)	5.500(-90.00)	10.735(62.24)	6.042(114.4)	5.500(90.00)	2.000(0.00)	6.042(24.44)	8.201(37.57)	10.735(-62.2)	6.042(-24.44)	8.000(180.00)	2.500(0.00)	6.042(-114.4)	8.201(-37.57)	2.500(0.00)	8.000(0.00)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Column1</th> <th>Column2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1.000(0.0)</td> <td>0.008(-48.8)</td> </tr> <tr> <td>0.003(-94.5)</td> <td>1.000(-0.3)</td> </tr> </tbody> </table>	Column1	Column2	1.000(0.0)	0.008(-48.8)	0.003(-94.5)	1.000(-0.3)
Column1	Column2	Column3	Column4																									
1998.000(0.00)	5.500(-90.00)	10.735(62.24)	6.042(114.4)																									
5.500(90.00)	2.000(0.00)	6.042(24.44)	8.201(37.57)																									
10.735(-62.2)	6.042(-24.44)	8.000(180.00)	2.500(0.00)																									
6.042(-114.4)	8.201(-37.57)	2.500(0.00)	8.000(0.00)																									
Column1	Column2																											
1.000(0.0)	0.008(-48.8)																											
0.003(-94.5)	1.000(-0.3)																											

Table 1 : Comparaison avec S.R. Cloude Optik 75,1,26-36(1986) 5.1 5.3 et 5.4



F.Ferrieu Mueller anisotropie

Un autre exemple est celui donné dans l'article ultérieur de Optical Engineering 1995 pour la matrice  $M_3$ :

$M_3 = \begin{bmatrix} 1.000 & -0.5261 & -0.1205 \\ -0.4131 & 0.5508 & 0.1924 \\ 0.3908 & 0.5560 & -0.0417 \\ -0.0498 & 0.0923 & -0.4381 \end{bmatrix}$		Column1	Column2	$S_3 = \begin{bmatrix} 1.000(0^\circ) & 0.6750 \\ 1.1666(-59^\circ) & 2.9323 \end{bmatrix}$
		1.000(0.0)	0.725(16)	
		1.083(58.6)	2.920(-11)	
				k vectors
	1.0000(0.0000)	1.000(0.0)		
	0.1425(-8.4613)	1.271(144.4)		
	0.1139(-9.4344)	0.628(134.5)		
	0.0240(-16.2043)	0.269(-77.2)		

Table 2 La matrice de Mueller  $M_3$  (S. R. Cloude Optical Engineering, 34,6, 1599(1995)), même calcul avec la procédure de décomposition.

### La Matrice de cohérence en Optique :

Definition : Le vecteur de Jones associés à une onde electromagnetique, par rapport à son amplitude A. On a

$\varepsilon = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix}$  la matrice de coherence se definit à partir des fonctions de correlations

$$\phi = \langle \varepsilon(t) \otimes \varepsilon^*(t) \rangle = \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1(t) \varepsilon_1^*(t) \rangle & \langle \varepsilon_1(t) \varepsilon_2^*(t) \rangle \\ \langle \varepsilon_2(t) \varepsilon_1^*(t) \rangle & \langle \varepsilon_2(t) \varepsilon_2^*(t) \rangle \end{bmatrix}$$

On utilise des parentheses pour montrer qu'il s'agit de moyenne statistique dans le temps de mesure :

$$\left\langle X(t) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

Les proprietés statistiques de cette matrice , apparait directement dans ses elements Pour un processus stochastique on aura

$$\phi = \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1(t) \varepsilon_1^*(t) \rangle & \langle \varepsilon_1(t) \varepsilon_2^*(t) \rangle \\ \langle \varepsilon_2(t) \varepsilon_1^*(t) \rangle & \langle \varepsilon_2(t) \varepsilon_2^*(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \mu \sigma_0 \sigma_1 \\ \mu^* \sigma_0 \sigma_1 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Où les  $\sigma_i$  sont les deviations standards et  $\mu$  le degre de coherence complexe. Cette matrice normalisée  $\Phi = \frac{\phi}{\text{tr}\phi}$  correspond à la matrice densité.

Expression des matrices de Jones en fonction des vecteurs de Stockes :

On definit un vecteur k de la façon suivante à partir des matrices de Pauli :

$$\sigma_i, \text{ avec } \sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Proprietés : operateurs unitaires , hermitiques  $\sigma_i = \sigma_i^\dagger$  , et trace orthogonaux

$\text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij}$ . On peut exprimer  $\phi \equiv \Phi$  suivant cette base , en consequence on ecrit :

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 s_i \sigma_i$$

Avec les coefficients  $s_i$  qui sont donnés par :

$$s_i = \text{tr}(\Phi \sigma_i), i=0,1,2,3$$

Si l'on explicite , on obtient

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} s_0 & 0 \\ 0 & s_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & -s_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s_2 \\ s_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -is_3 \\ is_3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_0 + s_1 & s_2 - is_3 \\ s_2 + is_3 & s_0 - s_1 \end{bmatrix}$$

Avec les  $s_i$  donnés par  $s_i = \text{tr}(S \sigma_i)$  . ce sont les parametres de Stockes qui sont des quantités mesurables .

Par exemple  $s_0 = \sum_{i=0}^3 [S \cdot \sigma_0]_{ii}$  . où  $S \cdot \sigma_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_0 + s_1 & s_2 - is_3 \\ s_2 + is_3 & s_0 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = s_0$

Extension a des vecteurs de Jones en 3 Dimensions :

## F.Ferrieu Mueller anisotropie

Etant donné un point  $r$  dans l'espace, les composantes de base d'un référentiel XYZ  $e_1, e_2, e_3$  les trois composantes du champ électromagnétique d'une onde se propageant dans la direction  $k$ . Elle peut être décrite par un vecteur complexe  $3 \times 1$

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_x(t) \\ \eta_y(t) \\ \eta_z(t) \end{pmatrix} = e^{i\omega t}$$

Où  $u(t) = k \cdot \left( \frac{r}{|r|} \right) - \omega t$   $k$  est

tant le vecteur d'onde moyen au point  $r$  de l'espace. Et le vecteurs d'onde correspondant en 3D sera

$$\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \\ \varepsilon_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x(t) \\ A_y(t) e^{i\delta_y(t)} \\ A_z(t) e^{i\delta_z(t)} \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta_y} \\ A_z e^{i\delta_z} \end{pmatrix}$$

La matrice de cohérence associée s'écrira par analogie à l'expression ( )

$$R = \left\langle \varepsilon(t) \otimes \varepsilon^\dagger(t) \right\rangle = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t) \varepsilon_1^\dagger(t) & \varepsilon_1(t) \varepsilon_2^\dagger(t) & \varepsilon_1(t) \varepsilon_3^\dagger(t) \\ \varepsilon_2(t) \varepsilon_1^\dagger(t) & \varepsilon_2(t) \varepsilon_2^\dagger(t) & \varepsilon_2(t) \varepsilon_3^\dagger(t) \\ \varepsilon_3(t) \varepsilon_1^\dagger(t) & \varepsilon_3(t) \varepsilon_2^\dagger(t) & \varepsilon_3(t) \varepsilon_3^\dagger(t) \end{bmatrix}$$

cette matrice aura 3 valeurs propres non négatives., une contrainte comme une condition nécessaire et suffisante pour une matrice hermitique  $R$  pour être une matrice de cohérence. En fonction des amplitudes et phases du champs magnétique on aura d'autre part :

$$R = \begin{bmatrix} (A_x^2(t)) & (A_x(t) A_y(t) e^{-i\delta_y(t)}) & (A_x(t) A_z(t) e^{-i\delta_z(t)}) \\ (A_x(t) A_y(t) e^{+i\delta_y(t)}) & (A_y^2(t)) & (A_y(t) A_z(t) e^{i(\delta_y(t) - \delta_x(t))}) \\ (A_x(t) A_z(t) e^{-i\delta_z(t)}) & (A_y(t) A_z(t) e^{-i(\delta_y(t) - \delta_x(t))}) & (A_z^2(t)) \end{bmatrix}$$

Les propriétés statistiques de  $R$  apparaissent immédiatement quand ses éléments  $r_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) sont écrits en terme de déviation standard  $\sigma_i$  et degré de cohérence  $\mu_{ij}$ . Si on a :  $r_{ij} \equiv \mu_{ij} \sigma_i \sigma_j$  où

$\sigma^2 = \langle \varepsilon_i \varepsilon_i^\dagger = r_{ii} \rangle$  et  $\mu_{ij} = r_{ij} / \sigma_i \sigma_j$  d'où

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \mu_{01} \sigma_0 \sigma_1 & \mu_{02} \sigma_0 \sigma_2 \\ \mu_{01}^\dagger \sigma_0 \sigma_1 & \sigma_1^2 & \mu_{12} \sigma_1 \sigma_2 \\ \mu_{02}^\dagger \sigma_0 \sigma_2 & \mu_{12}^\dagger \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Representation des effets de polarimetrie dans un media d'un materiau\_ (cf reference Optical Engineering (1995) ,34 6, 1599). :Theorie des Groupes et Matrices Unitaires : Description de la propagation des ondes à partir de la matrice exponentielle.

Elle est definie par la relation de Campbell-baker-Hausdorf.

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

Avec les A,B,C des matrices n x n et la relation à partir des commutateurs

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A \text{ soit}$$

Si  $\exp(B) = \exp(C)$ , on aura  $C = A + B + 1/2[A, B] + 1/12([A, [A, B]] + [B, [B, A]]) + \dots$  Cette matrice exponentielle possede de plus les propriétés suivantes :

$$\exp(S A S^{-1}) \equiv S \exp(A) S^{-1}$$

*det*  $\hat{\imath}$

et enfin

$$\exp(A)^{-1} \equiv \exp(-A)$$

Ce qui souvent signifie qu'il est plus souvent plus facile d'étudier la matrice A, plutôt que sa forme exponentielle. L'autre idée de la théorie des groupes est le concept d'une base adéquate pour le developpement de la matrice A C'est-à-dire comme nous l'avons vu précédemment A peut être developpé sous la forme :  $A = \sum_i \omega_i \beta_i$  avec  $\omega_i = \text{trace}(A \beta_i)$ . Les  $\beta_j$  correspondent à la base de matrice selectionnée.

F.Ferrieu Mueller anisotropie

Des exemples typiques sont les matrices de Pauli (2x2), puis les Gellman matrices pour un système 3x 3 et enfin les matrice de Dirac dans le cas 4x 4. La finalité pour chacune de ces base est de lui donner une interpretation géometrique et physique. Une fois ce choix fait, on peut utiliser les propriétés de commutation des éléments de base pour décomposer ou synthétiser des propblemes plus complexes.

De plus quand  $\exp(A)$  est un operateur unitaire, la relation  $\exp(A)^{-1} \equiv \exp(-A)$  entraine la contrainte suivante :  $\beta^{iT} \equiv -\beta, \text{Trace}(\beta) \equiv 0$ . Dans ce cas la base doit etre anti Hermitique ( ou hermitique si elles sont multipliées par  $i = \sqrt{-1}$ ).

De plus lorsque  $\exp(A)$  est membre d'un groupe Special unitaire (SU(n)), (le groupe des  $n \times n$  matrices (avec un determinant égal à un), on aura ainsi  $n^2 - 1$  parametres,  $n^2$  equations limites et une pour le determinant egal à l'unité.

D'où

SU(2) ->trois etats de base
SU(3) ->8 etats de base
SU(4)->15 etats de base.

F.Ferrieu Mueller anisotropie

Trois exemples correspondant au cas de la Polarimétrie :

Le Groupe SU(2) et les matrices de Pauli : qui sont les  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  combinées avec la matrice  $2 \times 2$   $\sigma_0$ . L'élément générale de SU(2) peut être succinctement écrit comme :

$$U_2 = \exp(-i\sigma \cdot n) \text{ où } U_2 \in SU(2)$$

, et  $\sigma$  est la triple matrice de Pauli et n un vecteur réel de base.

L'équation de transformation unitaire du champ électrique du vecteur de Jones écrite classiquement comme

$$E' = U_2 E \equiv \begin{bmatrix} e^{i\phi} \cos\alpha & e^{i\delta} \sin\alpha \\ -e^{-i\delta} \sin\alpha & e^{-i\phi} \cos\alpha \end{bmatrix} = \exp(i\phi \sigma_x) \exp(i\theta \sigma_y) \exp(i\tau \sigma_z)$$

Qui devient  $E' = \exp[(\lambda p - i\theta n) \cdot \sigma] E$

Où  $\lambda$  et  $\theta$  sont des scalaires réels et p, n des vecteurs réels.

Puis l'élément général du groupe SU(4) peut de la même façon s'écrire :

$$U_4 \equiv \exp(-i\eta \cdot x) \in SU(4)$$

Toute matrice  $4 \times 4$  [A] dans cette base peut donc s'écrire comme

$$H \equiv [A] = \sum_i a_i \eta_i \text{ où } a_i = \frac{1}{2} \text{Tr}([A_i] \cdot \eta_i)$$

Les matrices unitaires de cette base sont des matrices de Dirac *modifiées* qui se présentent sous la forme suivante ;

## F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \eta_{1(26)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{2(24)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{3(46)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\eta_{4(35)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{5(14)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \eta_{6(16)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{7(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\eta_{8(15)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{9(34)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{10(35)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \quad \eta_{11(23)} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\eta_{12(13)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{13(45)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{14(56)} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta_{15(25)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On applique successivement les relations suivantes lorsque la matrice de Mueller  $M$  peut se decomposer dans cette base. Puisque  $M = \sum_i H \eta_i$  et avec pour la matrice  $H$  :

$$H = \begin{bmatrix} A_0 + A & C - iD & H + iG & I - iJ \\ C + iD & B_0 + B & E + iF & K - iL \\ H - iG & E - iF & B_0 - B & M - i \\ I + iJ & K + iL & M - i & A_0 - A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

soit

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$m_{00} = \text{tr}(H \eta_0) = (h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}) = \text{tr}(H)$$

$$m_{01} = \text{tr}(H \eta_1) = \text{tr}(H)$$

$$m_{02} = \text{tr}(H \eta_2) = ((h_{02} + h_{20}) + i(h_{31} - h_{13})) = (H + L) \text{tr}(H)$$

$$m_{03} = \text{tr}(H \eta_3) = ((h_{03} + h_{30}) + i(h_{12} - h_{21})) = (I + F) \text{ avec } 3 = 4(0) + 3 = 3 (j=0).$$

De même pour la rangée suivante (j=1)

$$m_{10} = \text{tr}(H \eta_4) = (h_{01} + h_{10}) + i(h_{32} - h_{23})$$

$$m_{11} = \text{tr}(H \eta_5) = (h_{00} + h_{11} - h_{22} - h_{33}) = (A + B) \implies (4j+i)=5$$

$$m_{12} = \text{tr}(H \eta_6) = (h_{12} + h_{21}) + i(h_{03} - h_{30}) \text{tr}(H)$$

$$m_{13} = \text{tr}(H \eta_7) = (h_{13} + h_{31}) + i(h_{02} - h_{20})$$

Puis j=2

$$m_{20} = \text{tr}(H \eta_8) = (h_{02} + h_{20}) + i(h_{13} - h_{31})$$

$$m_{21} = \text{tr}(H \eta_9) = (h_{12} + h_{21}) + i(h_{03} - h_{30})$$

$$m_{22} = \text{tr}(H \eta_{10}) = (h_{00} - h_{11} + h_{22} - h_{33}) = (A - B)$$

$$m_{23} = \text{tr}(H \eta_{11}) = (h_{23} + h_{32}) + i(h_{01} - h_{10})$$

Et enfin j=3

$$m_{30} = \text{tr}(H \eta_{12}) = ((h_{03} + h_{30}) + i(h_{21} - h_{12}))$$

$$m_{31} = \text{tr}(H \eta_{13}) = \text{tr}(H)$$

$$m_{32} = \text{tr}(H \eta_{14}) = ((h_{23} + h_{32}) + i(h_{01} - h_{10}))$$

$$m_{33} = \text{tr}(H \eta_{15}) = ((h_{00} - h_{11} - h_{22} + h_{33})) = (A \text{tr}(H) - B_0) \text{tr}(H)$$

On vérifie de la même façon que  $m_{00} + m_{11} + m_{22} + m_{33} = 2(A_0 + B_0) = 4h_{00}$

Et l'on déduit ainsi la valeur de  $h_{00} = \frac{1}{4} \text{tr}(H) = 1/2 (A_0 + B_0)$

Voir Appendix 1 Relationship between Tc and M S.R.Cloude Optik,75,1,26-36 1986

Il semble donc important d'analyser les deux travaux suivants de S.R. Cloude. C'est le but de la suite de ce travail.



**Optik,75,1,(1986) 26-36 "Group Theory and polarisation algebra".**

Representation d'une onde polarisée monochromatique

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = e^{i\phi} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \cdot e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ou  $\alpha$  et  $\delta$  sont deux angles determinant l'état de polarisation en terme de rapport d'amplitude et de phase . Si l'on considere deux etats de base orthonormée  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$ , le changement de base s'ecrira

$$E' = [U_2]E \quad (2)$$

où  $[U_2]$  est une matrice 2x2 unitaire ( determinant egal à un).

C'est à ce point que l'on introduit l'homomorphisme  $SU(2) \cong O^{+i(3)i}$  pour convertir l'equation complexe (1) en une forme equivalente réelle par un changement de base. Suivant cet homo morphisme, il y a une equivalence  $2 \rightarrow 1$  entre l'ensemble des matrices  $U_2$  et l'ensemble des matrices unitaire 3x3 réelles  $[O_3]$ . De telle sorte que pour une paire  $\pm[U_2]$ , on peut générer une matric réelle 3x3 de la façon suivante:

$$[O_3] = \frac{1}{2} \text{Tr}([U_2]^{iT} \cdot \sigma_p \cdot [U_2] \cdot \sigma_p) \quad (3)$$

ou les  $\sigma_p$  sont les 3 matrices de Pauli.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

La matrice réelle  $[O_3]$  opere sur un vecteur réel  $r$  pour obtenir un vecteur  $r'$  obtenu par une rotation. Dans l'espace réel, l'equation (2) est équivalente donc à :  $r' = [O_3]r$ .

On peut relier  $r$  avec  $E$  par le biais de la matrice de cohérence :

$$[J] = E \cdot E^{iT} \quad (4)$$

Ce qui s'ecrit en forme matriciel :

$$[J] = \begin{bmatrix} E_x E_x^{i\delta} & E_x E_y^{i\delta} \\ E_y E_x^{i\delta} & E_y E_y^{i\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 + g_1 & g_2 - i g_3 \\ g_2 + i g_3 & g_0 - g_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Où l'on a introduit la forme parametrique des composantes d'un pseudo vecteur  $g_i$ .

En fait, l'ensemble des quantités réelles :  $\check{g} = (g_0, g_1, g_2, g_3)$  forme bien un vecteur de dimension 4., où  $g_0$  est un scalaire et les quantités  $g_1, g_2, g_3$  se transforment comme un vecteur dans l'espace à trois dimensions. Ce vecteur est défini comme le vecteur de Stokes est se transforme suivant l'equation matricielle.

$$\check{g}' = [M] \cdot \check{g} \quad (6)$$

Cette fois ci l'ensemble des matrices  $\sigma$  constitue l'ensembles des matrices de Pauli plus  $\sigma_0$  la matrice identité 2x2.

La matrice  $[M]$  est une extension de  $[O_3]$  et est representée par une matrice 4x4 donnée par la relation :

F.Ferrieu Mueller anisotropie

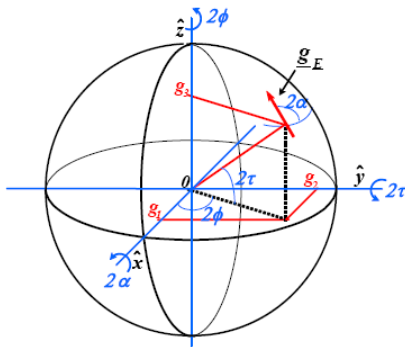
$$[M] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( [U_2]^{\dagger T} \cdot \sigma \cdot [U_2] \cdot \sigma \right) \quad (7)$$

et où les  $\sigma$  constituent l'ensemble de 4 matrices 2x2,  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_p)$  formé à partir des matrices de Pauli et  $\sigma_0$  la matrice identité 2x2. De fait de la structure du vecteur de Stockes,  $|M|$  représente une forme étendue de  $|O_3|$ . On a :

$$[M] = \hat{c}$$

Interpretation géométrique de  $[J]$ . C'est une application de l'espace des polarisations sur un espace vectoriel  $r$  : où  $r$  est un vecteur d'amplitude constante  $g_0$  sur la surface de la sphère de Poincaré.

## F.Ferrieu Mueller anisotropie



$g = (g_0, g_1, g_2, g_3)$
$g_0^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$
$g_0$ rayon de la sphere
$\phi$ angle d'inclinaison de l'axe principale de l'ellipse
$\zeta$ ellipticité

Pour une onde partiellement polarisée on aura  $g_0^2 > g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$ . Dans le cas d'une dépendance temporelle où  $E_x, E_y$  dépendent du temps, le point clé est la présence ou autrement la structure corrélée de l'état de polarisation. On forme la matrice de cohérence intégrée  $\langle [J] \rangle$  où une moyenne est obtenue avec le signe  $\langle \rangle$  qui signifie  $\langle \rangle = 1/2T \int dt$ . Si l'on effectue une analyse des vecteurs propres de  $\langle [J] \rangle$ , on peut représenter une onde partiellement polarisée de deux façons différentes. (the wave dichotomy [7,10].

√ Une somme non cohérente de deux états "purs" pondérée par les valeurs propres de  $\langle [J] \rangle$ , soit les valeurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ :  $\langle [J] \rangle = \lambda_1 [J_1] + \lambda_2 [J_2]$  et où  $\det [J_1] = \det [J_2] = 0$ . Si on a  $\lambda_1 = \lambda_2$  on a affaire à une polarisation aléatoire et dans le cas où  $\lambda_2 = 0$  une polarisation elliptique. Enfin on peut soit :

donner un degré de corrélation si on définit par  $D_p = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$  où  $0 < D_p < 1$

calculer l'entropie, ("wave entropy"), au moyen de  $H_H = - \sum_{i=1}^2 P_i \log_2 P_i$  où  $0 < H_H < 1$  avec

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

√ Une somme incohérente de deux composantes, une elliptique, et l'autre de polarisation aléatoire soit  $\langle [J] \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2) [J_1] + \lambda_2 [I_2]$  avec  $[I_2]$ , la matrice identité. ce qui est équivalent à un vecteur de Stokes moyen  $\langle g \rangle = (g_A, g_1, g_2, g_3) + (g_B, 0, 0, 0)$  où  $g_0 = g_A + g_B$  et  $g_0^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$ . Il y a donc deux avantages d'utiliser l'homomorphisme  $SU(2) \rightleftharpoons O^{+i(3)i}$  pour décrire la polarisation:

F.Ferrieu Mueller anisotropie

Récapitulation :

1 On peut décrire un état partiel de polarisation elliptique en mesurant le vecteur de Stokes soit 4 intensités pas d'utilisation de détecteur "cohérent".

2 A chaque état de polarisation correspond un point sur la sphère de Poincaré et l'interprétation d'un changement de polarisation correspond à un mouvement de ce point sur la sphère.

On peut s'intéresser à cette extension de ce formalisme mathématique au-delà de SU(2) et c'est l'objet du paragraphe suivant.

Homomorphisme: SU(4)-O+(6)

S.R. Cloude On considère l'homomorphisme entre le groupe complexe SU(n) et le groupe réel O<sup>+</sup>(m). On essaie d'établir la conversion entre ces deux groupes.

Le premier argument est de comparer les degrés de liberté (DOF) de chaque groupe en tenant compte de la contrainte sur l'obligation d'un déterminant égal à l'unité.

DOF<sub>SU</sub>=n<sup>2</sup>-1 matrice n×n avec le déterminant =1. Pour le cas de O<sup>+</sup>(n) on a DOF<sub>O</sub>=1/2 n(n-1). On aboutit ainsi au tableau des correspondances suivant :

n	Degrees of Freedom (DOF) SU	Degrees of Freedom (DOF) O
1	0	0
2	3	1
3	8	3
4	15	6
5	24	10
6	35	15
7	48	21

F.Ferrieu Mueller anisotropie

Les homomorphismes possibles apparaissent entre  $n=2$ , c'est à dire  $SU(2)$  avec  $n=3$   $O(3)$ , mais aussi entre  $SU(4)$  et  $O(6)$  avec un degré de liberté égale à 15. Ces matrices rotation réelles et orthogonale  $[O_6]$  comme le produit dans 15 plans de rotation différents ( une généralisation des angles d'Euler à 3 dimensions). Soit,

## F.Ferrieu Mueller anisotropie

(1,2), (1,3), (1,4) (1,5),(1,6),  
 (2,3), (2,4), (2,5) (2,6),  
 ( 3,4),(3,5), (3,6)),  
 (4,5), (4,6),  
 (5,6),

$$[O_6] = \prod_{i,j}^{j+1} \hat{u}_i \hat{u}_j$$

On a ainsi par exemple

$$[O_{16}] \equiv \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Et

$$[O_{14}] \equiv \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & 0 & -\sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & 0 & \cos\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec  $i=5,4,1, j=6,5,4, i+1$  et  $[O_{ij}]$  represente une rotation de  $\hat{\mu}$  degrees dans les plans  $ij$ . On doit etablir l'application (mapping) entre les composantes de chaque plan avec un element de  $SU(4)$ .

Ce mapping de chacun des composante dans chaque plan  $ij$  avec un element de  $SU(4)$  peut s'effectuer en 4 étapes:

Il y a 4 vecteurs de base complexes indépendants dans  $SU(4)$  à associer à 6 vecteurs de base dans l'autre espace :

4 Complex Space	6 complex space	Base du produit vectoriel
$(e_1, e_2, e_3, e_4)$	$(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$	$e_i \wedge e_i = 0$ et $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$
		$t_1 = e_1 \wedge e_2$
		$t_2 = e_2 \wedge e_3$

Relation  $[A]$  dans  $C_4 \Rightarrow [W]$  dans  $C_6$

Pour une matrice  $[A]$  dans  $C_4$  on a :

$$e_i \wedge e_j \xleftrightarrow{[A]} [A]e_i \wedge [A]e_j = \sum_r \sum_s a_{ri} a_{sj} (e_r \wedge e_s)$$

$$e_i \wedge e_j \xleftrightarrow{[W]} [W]_{ij} e_i \wedge e_j \text{ soit } [W]_{ij} = \sum_k \sum_l a_{ik} a_{jl} (e_k \wedge e_l)$$

$$[W]_{11} = a_{11} a_{11} (e_1 \wedge e_1) + a_{11} a_{12} (e_1 \wedge e_2) + a_{13} a_{13} (e_3 \wedge e_3) + a_{14} a_{14} (e_4 \wedge e_4) + a_{12} a_{21} (e_2 \wedge e_1) \dots$$

Les termes croisés s'éliminent ainsi que les termes  $e_i \wedge e_i$  et on a finalement

$$[W]_{11} = (-a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22}) (e_1 \wedge e_2)$$

On démontre ainsi que  $|W|$  correspond à une matrice complexe dont les 36 éléments sont les 36 mineurs (2,2) de  $|A|$ . Puisque  $e_i \wedge e_i = 0$  et  $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ . De façon générale cette matrice complexe  $|W|$  n'est pas forcément orthogonale.

Ayant obtenu le mapping de  $|A|$  dans  $|W|$ , on peut ensuite considérer le produit vectoriel de deux vecteurs  $a, b$  dans  $C_6$

$$a = \sum_{i=1}^6 a_i t_i \text{ et } b = \sum_{j=1}^6 b_j t_j$$

Ce produit vectoriel s'écrit  $a \wedge b = f(a, b) \hat{i}$  et le volume de l'élément de base devient ainsi:

$$f(a, b) = a_1 b_4 + a_2 b_5 + a_3 b_6 + a_4 b_1 + a_5 b_2 + a_6 b_3$$

Cela se démontre en faisant le produit vectoriel des 6 vecteurs de base  $t$  et en utilisant le fait que chaque élément d'index répété est nul.

$$a \wedge b = \hat{i}$$

$$\hat{i} a_1 \sum_{i=1}^6 b_i (t_1 \wedge t_i) = a_1 b_2 (t_1 \wedge t_2) + a_1 b_3 (t_1 \wedge t_3) + a_1 b_4 (t_1 \wedge t_4) + \dots$$

$$\hat{i} a_1 b_2 (e_1 \wedge e_2 \wedge e_2 \wedge e_3) + a_1 b_3 (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_1) + a_1 b_4 (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) + \dots$$

$$a \wedge b = f(a, b) (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$$

Avec l'élément de volume  $f(a, b)$ :

$$f(a, b) = a_1 b_4 + a_2 b_5 + a_3 b_6 + a_4 b_1 + a_5 b_2 + a_6 b_3$$

La relation précédente s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = f(a, b) = [P]a .$$

On remarque une permutation cyclique dans les valeurs de b, donc pour obtenir un produit scalaire, i.e.,  $\sum_i^6 a_i b_i$ , il est nécessaire de considérer non

$[W][W]^T$  mais  $[W][P][W]^T$  car  $[P]$  permute les rangées de  $[W]$  de façon correcte.

Si l'on considère une matrice unitaire  $[A]$  dans  $SU(4)$ , l'élément de volume est égale à l'unité et le produit matriciel  $[W][P][W]^T$  aura 1 en position  $(1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (6,3)$  donc on aura  $[W][P][W]^T = [P]$

De même si  $[A]$  est unitaire on a  $[A]^{\dagger T} \cdot [A] = [I_6]$  et en conséquence, du fait de l'invariance du volume dans la transformation on aura aussi  $[W]^{\dagger T} \cdot [W] = [I_6]$  et  $[W]$  est aussi unitaire.

2) On a obtenu un mapping à partir d'une matrice 4x4 unitaire  $[A]$ , vers une matrice 6x6 unitaire  $[W]$ . En fait on veut un mapping entre une matrice 4x4  $[A]$  avec une matrice 6x6 réelle et orthogonale et donc ne correspondant pas à  $[W]$ .

On peut déduire une telle matrice à partir de  $[W]$  en utilisant l'équation précédente:

$[W][P][W]^T = [P]$ , la relation de la matrice  $[W]$  avec la matrice  $[P]$ . Pour cela on définit une matrice symétrique  $[Q]$  avec les relations suivantes :

$$[Q]^2 = [P] \text{ et } [Q] = [Q]^T . \text{ On note que } [P]^2 = [I_6] \text{ donc } [Q]^4 = [P]^2 = [I_6]$$

et donc aussi

$$[Q]^3 = [Q]^4 \cdot [Q]^{-1} = [P]^2 \cdot [Q]^{-1} = [I_6] \cdot [Q]^{-1} = [Q]^{-1} \text{ soit } [Q]^3 = [Q]^{-1}$$

On peut développer une matrice réelle orthogonale, en effectuant une transformation équivalente sur  $[W]$  à l'aide de la matrice  $[Q]$ , i.e.,



F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$[O_6] = [Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}$$

Pour prouver cela ,il faut demontrer que  $[O_6]$  est orthogonal et aussi unitaire:

Si  $[O_6]$  est orthogonale on doit avoir:  $[O_6]^{-1} \cdot [O_6] = [I_6]$ .

*Démonstration:*

*Pour une rotation*

$[O_6]^T$  revient à changer le signe dans la rotation et en conséquence  $[O_6]^{-1} = [O_6]^T$

$$[O_6]^T \cdot [O_6] = ([Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1})^T \cdot ([Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}) = ([Q] \cdot [W] \cdot [Q]^3)^T \cdot ([Q] \cdot [W] \cdot [Q]^3) = ([Q] \cdot [W]^T [Q]^T) \cdot ([Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}) \cdot [Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}$$

Si  $[O_6]$  est unitaire on doit avoir:  $[O_6]^{iT} \cdot [O_6] = [I_6]$

*Démonstration:*

$$[O_6]^{iT} \cdot [O_6] = ([Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1})^{iT} \cdot ([Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}) = ([Q]^{-1*} [W]^i [Q]^i) \cdot ([Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}) = [Q] \cdot [I_6] \cdot [Q]^{-1} = [I_6]$$

En résumé ,

on peut effectuer l'application de SU(4) dans O(6) de la façon suivante :

1.  $[U_4]$  matrice 4 x 4 complexe
2. Calcul de  $[W]$  matrice 6x6 complexe
3. Puis de  $[O_6] = [Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}$  matrice 6 x 6 réelle orthogonale

où, ici, S. R. Cloude donne  $[Q] = \frac{1}{2}(1-i) \begin{bmatrix} I_3 & iI_3 \\ iI_3 & I_3 \end{bmatrix}$

$[U_4]$ matrice 4 x 4 complexe	SU(4)
↓	
$[W]$ matrice 6x6 complexe	O(6) complexe
↓	
$[O_6] = [Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}$ matrice 6 x 6 réelle orthogonale	où $[Q] = \frac{1}{2}(1-i) \begin{bmatrix} I_3 & iI_3 \\ iI_3 & I_3 \end{bmatrix}$

De plus si on écrit  $[O_{ij}] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , on peut donc aisément calculer

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$[W] = -i \begin{bmatrix} (B-C)+i(A+D) & (A-D)+i(B+C) \\ (D-A)+i(B+C) & (C-B)+i(A+D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [W]_1 & [W]_2 \\ [W]_3 & [W]_4 \end{bmatrix}$$

L' équation donnée par S.R. Cloude ,( page 958, *Journal of Electromagnetic wavse, Vol6,8,947-974s (1992)*) est la bonne équation à retenir.

Exemple

Il fait ensuite l'application pour le cas de  $[O_{16}]$ :

$$[O_{16}] \equiv \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ une rotation dans le plan (1,6).}$$

On obtient par exemple avec Mathematica avec ;(ici le parametre "a" correspond à l'angle  $\hat{\phi}$ )

```

Cos[a] 0 0 0 0 -Sin[a]
0 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0
Sin[a] 0 0 0 0 Cos[a]
    
```

avec les partitions correspondantes A, B, C, D de la matrice de  $[O_{16}]$

$$[W] = -i \begin{bmatrix} (B-C)+i(A+D) & (A-D)+i(B+C) \\ (D-A)+i(B+C) & (C-B)+i(A+D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [W]_1 & [W]_2 \\ [W]_3 & [W]_4 \end{bmatrix}$$

On obtient l'équation 3.15 de S.R.Cloude au facteur 2 près de norme.dans les blocs

correspondants à chaque operation matriciel  $[W] = \begin{bmatrix} [W]_1 & [W]_2 \\ [W]_3 & [W]_4 \end{bmatrix} =$

```

I Sin[a] Cos[a] 0 -Sin[a]
0 0 0 0
Cos[a] Sin[a] 0 0
0 0 0 0
I Sin[a] Cos[a] 0 -Sin[a]
0 0 0 0
    
```

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$[O_{16}] = \begin{bmatrix} \cos a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos a \end{bmatrix}$$

Une autre verification consiste aussi à repartir de  $[O_{16}]$

$$[O_{16}] = \begin{bmatrix} \cos a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos a \end{bmatrix}$$

On batit ensuite la matrice Q , calcule son inverse et on peut vérifier que le produit est égal à l'unité. On obtient donc ainsi la matrice |W| l'équation (3.15) de S.R. Cloude

$$[W] = 2 \cdot [Q]^{-1} \cdot [O_{16}] \cdot [Q] =$$

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 + \cos a & 0 & -i \sin a & -i(1 - \cos a) & 0 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i \sin a & 0 & 1 + \cos a & \sin a & 0 & i(1 - \cos a) \\ i(1 - \cos a) & 0 & -\sin a & 1 + \cos a & 0 & i \sin a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin a & 0 & -i(1 - \cos a) & i \sin a & 0 & 1 + \cos a \end{bmatrix}$$

Ce qui prouve que l'equation  $[O_6] = [Q] \cdot [W] \cdot [Q]^{-1}$  est correcte.

Re-calcul de la matrice dans  $[U_4]$  correspondant à la rotation  $[O_{16}]$  soit  $[U_{16}]$ :

On a obtenu la matrice W:

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 + \cos \phi & 0 & -i \sin \phi & -i(1 - \cos \phi) & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i \sin \phi & 0 & 1 + \cos \phi & \sin \phi & 0 & i(1 - \cos \phi) \\ i(1 - \cos \phi) & 0 & -\sin \phi & 1 + \cos \phi & 0 & i \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & -i(1 - \cos \phi) & i \sin \phi & 0 & 1 + \cos \phi \end{bmatrix}$$

Il est plus opportun de passer à l'angle moitié, pour éliminer le facteur 2 qui est présent dans cette matrice. En effet suivant  $\hat{n}/2$  on aura :avec l'elimination du facteur 2 précédent

<sup>2</sup> et non celle dans le papier de S.R.Cloude équation (3.8).  $[O_6] = [Q] \cdot [W] \cdot [Q]^T$

## F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$[W] = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi/2 & 0 & -i \sin \phi/2 \cos \phi/2 & -i \sin^2 \phi/2 & 0 & -\cos \phi/2 \sin \phi/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i \sin \phi/2 \cos \phi/2 & 0 & \cos^2 \phi/2 & \cos \phi/2 \sin \phi/2 & 0 & i \sin^2 \phi/2 \\ i \sin^2 \phi/2 & 0 & -\cos \phi/2 \sin \phi/2 & \cos^2 \phi/2 & 0 & i \cos \phi/2 \sin \phi/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi/2 \sin \phi/2 & 0 & -i \sin^2 \phi/2 & i \cos \phi/2 \sin \phi/2 & 0 & \cos^2 \phi/2 \end{bmatrix}$$

Pour cela il faut résoudre le système correspondant à chacun des mineurs de formulés à partir des éléments de  $[U_{16}]_{ij} = u_{ij}$ , c'est à dire par exemple pour la première ligne de [W] avec  $\varphi = \phi/2$

$$\cos^2 \varphi = [W]_{11} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} \Rightarrow u_{11} = u_{22} = \cos \varphi$$

et

$$u_{12}u_{21} \equiv 0$$

$$1 = [W]_{22} = -u_{13}u_{31} + u_{11}u_{33} \Rightarrow u_{13} = \pm u_{31} = \pm i \sin \varphi \text{ et } u_{33}, u_{11} = \cos \varphi \Rightarrow 1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$

$$\cos^2 \varphi = [W]_{33} = -u_{14}u_{41} + u_{11}u_{44} \Rightarrow u_{41}u_{14} \equiv 0 \text{ et } u_{44} = \cos \varphi$$

$$\cos^2 \varphi = [W]_{44} = -u_{23}u_{32} + u_{22}u_{33} \Rightarrow u_{23}u_{32} = 0 \text{ et } u_{33} = \cos \varphi$$

$$1 \cdot [W]_{55} = -u_{24}u_{42} + u_{22}u_{44} \Rightarrow u_{24} = \pm u_{42} = \pm i \sin \varphi \text{ et } u_{44} = \cos \varphi$$

$$\cos^2 \varphi = [W]_{66} = -u_{34}u_{43} + u_{33}u_{44} \Rightarrow u_{43}u_{34} = 0 \text{ et } u_{33}, u_{44} = \cos \varphi$$

Ce qui permet bien déjà de vérifier la décomposition

$$[U_{16}] = \exp \left[ i \frac{\phi}{2} \eta_6 \right] = \cos \varphi \eta_0 + i \sin \varphi \eta_6 \text{ ( voir decomposition ci apres), avec}$$

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit la matrice } [U_{16}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & u_{12} & \pm i \sin \varphi & u_{14} \\ u_{21} & \cos \varphi & u_{23} & \pm i \sin \varphi \\ \mp i \sin \varphi & u_{32} & \cos \varphi & u_{34} \\ u_{41} & \pm i \sin \varphi & u_{43} & \cos \varphi \end{bmatrix} = \cos \varphi \eta_0 + i \sin \varphi \eta_6$$

$$\text{Ou on doit vérifier } \eta_6 = ? \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm i \\ \mp i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour les autres termes restant on peut essayer  $[W]_{13}, [W]_{15}$  et  $[W]_{16}$ , ect ...:

$$[W]_{12} = -u_{13}u_{21} + u_{11}u_{23} = 0 = -u_{13}u_{21} + \cos \varphi u_{23} =$$

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$\begin{aligned}
 [W]_{13} &= -u_{14}u_{21} + u_{11}u_{24} = -i \cos \phi \sin \phi = -u_{14}u_{21} + u_{24} \cos \phi \\
 [W]_{46} &= -u_{24}u_{33} + u_{23}u_{34} = i \sin \phi \cos \phi = +u_{23}u_{34} - u_{24} \cos \phi \\
 [W]_{36} &= -u_{14}u_{43} + u_{13}u_{44} = i \sin^2 \phi = -u_{14}u_{43} + u_{13} \cos \phi \\
 [W]_{14} &= -u_{13}u_{22} + u_{12}u_{23} = -i \sin^2 \phi = +u_{12}u_{23} - u_{13} \cos \phi \\
 [W]_{15} &= -u_{14}u_{22} + u_{12}u_{24} = 0 = +u_{12}u_{24} - u_{14} \cos \phi \\
 [W]_{16} &= -u_{14}u_{23} + u_{13}u_{24} = -\cos \phi \sin \phi \\
 [W]_{34} &= -u_{13}u_{42} + u_{12}u_{43} = \cos \phi \sin \phi
 \end{aligned}$$

Soit la matrice

$$[U_{16}] = i$$

On a testé également que la matrice correspondante à l'équation 3.16

$$\begin{pmatrix}
 \cos \frac{a}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{a}{2} \\
 0 & \cos \frac{a}{2} & i \sin \frac{a}{2} & 0 \\
 0 & i \sin \frac{a}{2} & \cos \frac{a}{2} & 0 \\
 \sin \frac{a}{2} & 0 & 0 & \cos \frac{a}{2}
 \end{pmatrix}$$

Instruction

```

W = TrigExpand[Release[2, Minors[U16, 2]]];
MatrixForm[W]

```

Par le biais de mathematica donne une valeurs de |W| :

$$\begin{pmatrix}
 \cos a & 0 & i \sin a & -1 \\
 0 & \cos a & i \sin a & 0 \\
 i \sin a & 0 & \cos a & i \sin a \\
 -i \sin a & 0 & \cos a & -1
 \end{pmatrix}$$

Une forme différente de celle trouvée précédemment. L'équation Minors[U16,2] ne correspond donc pas à la solution du problème pour déduire la matrice |W| à partir de [U<sub>16</sub>].

$$[U_{16}] = \exp \left[ i \frac{\phi}{2} \eta_6 \right] = \frac{\cos \phi}{2} \eta_0 + i \sin \frac{\phi}{2} \eta_6$$

qui permet d'obtenir si l'on considère toutes les matrices [O<sub>ij</sub>] pour les 15 plans de rotation, l'ensemble des générateurs de base η. Avec la matrice unitaire η<sub>0</sub> 4 x 4, ces matrices forment un ensemble complet, de façon à ce que toute matrice 4 x 4 [A] peuvent être exprimée comme une combinaison linéaire de ces matrices, ainsi

$$[A] = \sum_{i=1}^4 a_i \eta_i \text{ avec } \eta_i = \frac{1}{2} \text{Tr}([A] \cdot \eta_i)$$

## Application à la Polarimétrie

Le but est une décomposition univoque en cibles de la matrice  $[M]$ . Soit

$$[M] = \gamma_1 [M_1] + \gamma_2 [M_2] + \gamma_3 [M_3]$$

Lorsqu'une variable dynamique progresse les éléments de  $[S]$  (matrice de Jones  $2 \times 2$ ), changent et l'on mesure une propriété moyenne durant une certaine période de temps sur une région de l'espace. Dans un tel événement dynamique, il est souhaitable de pouvoir identifier la présence d'une structure corrélée, la présence ou l'absence d'un processus de scattering dominant dans les fluctuations de  $[S]$ . Cette information peut être obtenue à partir de  $[M]$ .

On écrit  $[M] = \sum_i \gamma_i [M_i]$

Le but est de savoir que sont les coefficients de pondération  $\gamma_i$ . Combien de matrices sont nécessaires pour représenter la matrice la plus générale  $\langle [M] \rangle$ ? Comment déterminer les contraintes sur  $[M]$  pour correspondre à une seule matrice de Jones  $[S]$ ?

Nouvelle formulation du Scattering basée non sur  $[S]$ , mais sur un "target" vecteur :

On l'introduit en considérant le développement de la matrice de scattering  $[S]$  suivant

l'anneau des matrices de Pauli  $\sigma$ . Ces matrices forment une base complète, on peut y exprimer

toute matrice  $2 \times 2$  et donc :  $[S] = \sum_i k_i \sigma_i$  où les coefficients  $k_i$  les projections sur les axes de la base de cet espace et s'écrivent  $k_i = 1/2 \text{Tr}([S] \cdot \sigma_i)$  (c'est l'équivalent d'un produit scalaire dans l'espace à trois dimensions).

Au lieu d'une description matricielle de la matrice de Jones  $S$ , nous avons maintenant un vecteur  $k$  à 4 composantes complexes avec les éléments :

$$k_0 = \frac{1}{2} (S_{xx} + S_{yy})$$

$$k_1 = \frac{1}{2} (S_{xx} - S_{yy})$$

$$k_2 = \frac{1}{2} (S_{xy} + S_{yx})$$

$$k_3 = \frac{i}{2} (S_{xy} - S_{yx})$$

On n'est pas limité aux matrices de Pauli, comme ensemble de base de matrice  $2 \times 2$  suffit, dans la mesure où ces matrices forment un ensemble complet.

Après avoir généré un tel ensemble, on peut créer une telle matrice  $[S_1]$ , elle aura 6 degrés de liberté ( $4 \times 2 - 2$  contraintes sur le  $k_1$ ), puis une seconde matrice  $[S_2]$ , etc... En construisant cette base on obtient,  $6 + 5 + 3 + 1 = 15$  degrés de liberté. On peut démontrer ainsi que dans cette base l'équation matricielle de transformation des vecteurs  $k$  sera donnée par une matrice  $U_4$  telle que

$$k' = [U_4] \cdot k$$

F.Ferrieu Mueller anisotropie

ou  $[U_4]$  est une matrice 4x4 avec 15 degrés de liberté. La matrice  $U_4$  représente une classe de transformation bien plus large que celle définies précédemment.

A partir de cet ensemble, il est logique de rechercher et d'introduire une matrice de cohérence 4x4, dérivée de  $k$  qui s'écrira sous la forme :

$$[T_c] = k \cdot k^{\dagger}$$

Sous un changement de base, on aura également:

$$[T_c]' = [U_4][T_c][U_4]^{\dagger}$$

La matrice  $[T_c]$  est une matrice de cohérence analogue à la matrice  $[J]$ . Il est important de noter est le fait que lorsque  $[T_c]$  est exprimé dans la base de Pauli, cette matrice est justement la matrice de Mueller  $[M]$ , qui peut être mesurée de façon standard.

.On a vu précédemment que les coefficients du développement de  $[J]$  forment un vecteur de Stokes réel  $g$  qui a une interprétation sur la sphère de Poincaré. De façon similaire, on peut interpréter les éléments de  $[T_c]$  géométriquement, en utilisant l'homomorphisme  $SU(4) \rightarrow O(6)$ .

un vecteur  $k$  tel que :

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$k = i \frac{1}{2} \text{Trace}(S\Psi) = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$



F.Ferrieu Mueller anisotropie

Rappelons que

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \implies k \equiv V(S) = \frac{1}{2} \text{Trace}(S \Psi) = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Où l'opération  $\text{Trace}(S \Psi)$  apparaît ici comme le produit scalaire de deux matrices et dans le cas des matrices de Pauli on aura ainsi :

$$k = \frac{1}{2} \dot{i}$$

En effet écrivant le produit scalaire :

$$\begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$k \equiv \dot{i}$$

Où les éléments de la matrice de Mueller M sont donc reliés à [S] par l'équation:

$$[M] = \frac{1}{2} \text{Tr}([U_2]^{i^T} \cdot \sigma \cdot [U_2] \cdot \sigma)$$

Qui devient ici

$$m_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr}([S]^{i^T} \cdot \sigma_i \cdot [S] \cdot \sigma_j)$$

Montrons maintenant que ces coefficients peuvent également s'exprimer de la façon suivante:

$$m_{ij} = \frac{1}{2} \text{Trace}(\dot{i})$$

Où les 16 matrices  $\eta$  sont les matrices de la base de  $[U_4]$  et la matrice identité 4x4  $\eta_0$ .

Pour prouver cela on a besoin seulement d'un seul résultat clé: Si le produit de deux matrices  $[S_1]$  et  $[S_2]$  donne une nouvelle matrice  $[S_3]$ , avec le vecteur correspondant  $k_3$ , qui sera donné par la relation

$$k_3 = k_1^T \cdot x \cdot k_2$$

Où x correspond à l'ensemble des matrices  $\eta_0$  à  $\eta_3$  et  $k_1, k_2$  sont les vecteurs "cible" correspondant à  $S_1$  et  $S_2$ . Avec cette supposition on a :

$$[S] \cdot \sigma_j = x_j \cdot k$$

Où k correspond à S. et alors de façon similaire :

$$\sigma_i \cdot S \cdot \sigma_j = x_i^T \cdot x_j \cdot k$$

Si  $S \rightarrow k$  alors,  $S^{i^T} \rightarrow k^i$  et la trace de la matrice produit  $S_1 \cdot S_2$  sera donnée par

$$\text{Tr}(S_1 \cdot S_2) = k_1^T \cdot k_2$$

Et donc nous avons

$$2m_{ij} = k^{i^T} \cdot x_i^T \cdot x_j \cdot k$$

F.Ferrieu Mueller anisotropie

Mais  $m_{ij}$  est une valeurs scalaire .Nous pouvons en prendre la trace et utiliser les propriétés cyclique de la trace pour la re écrire sous la forme

$$m_{ij} = \text{Tr} (m_{ij}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{\rho}$$

En notant que  $x_i^T \cdot x_j^T = \eta_{4i+j}$

D'ou le resultat, les elements de la matrice de Mueller sont donné par le developpement de la matrice de cohérence das la base des matrices  $\eta_{4i+j}$ <sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Voir Appendix 1 Relationship between Tc and M S.R.Cloude Optik,75,1,26-36 1986

F.Ferrieu Mueller anisotropie

On commence par écrire  $[T_c]$  sous la forme paramétrique :

$$[T_c] = \begin{bmatrix} A_0 + A & C - iD & H + iG & I - iJ \\ C + iD & B_0 + B & E + iF & K - iL \\ H - iG & E - iF & B_0 - B & M + i \\ I + iJ & K + iL & M - i & A_0 - A \end{bmatrix}$$

et former ensuite chaque éléments de la matrice de mueller correspondante puisque:

$$M \equiv [M]_{ij} = \sum_i m_{ij} \eta_{4i+j} \text{ où les } m_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr}([T_c]_{ij} \cdot \eta_{4i+j})$$

Les matrices unitaires de cette base sont des matrices de Dirac *modifiées* qui se présentent sous la forme suivante ;,

$\eta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\eta_{1(26)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{2(24)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{3(46)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\eta_{4(35)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{5(14)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\eta_{6(16)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{7(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\eta_{8(15)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{9(34)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{10(35)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\eta_{11(23)} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\eta_{12(13)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{13(45)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{14(56)} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\eta_{15(25)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

F.Ferrieu Mueller anisotropie

Tableau 1  $\eta$  matrices. On a fait figurer les plans de rotation dans  $R_6$ .

Ce n'est qu'une généralisation de  $[U_4]$  avec les éléments A,...N étant des nombres entiers, et donc que l'on peut obtenir expérimentalement avec des mesures d'intensité.

Applicant les relations précédentes on peut aisément déduire la forme équivalente pour la matrice de Mueller : On écrit successivement la trace de chaque produit

matriciel  $[T_c] \cdot \eta_{4j+i}$ :

$$m_{00} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{00}) = ([T_c]_{00} + [T_c]_{11} + [T_c]_{22} + [T_c]_{33}) = \text{tr}(T_c)$$

$$m_{01} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{01}) = \text{tr}(T_c)$$

$$m_{02} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{02}) = ([T_c]_{02} + [T_c]_{20}) + i([T_c]_{31} - [T_c]_{13}) = (H + L) \text{tr}(T_c)$$

$$m_{03} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{03}) = ([T_c]_{03} + [T_c]_{30}) + i([T_c]_{12} - [T_c]_{21}) = (I + F) \text{tr}(T_c)$$

De même pour la rangée suivante (j=1)

$$m_{10} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{10}) = ([T_c]_{01} + [T_c]_{10}) + i([T_c]_{32} - [T_c]_{23})$$

$$m_{11} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{11}) = ([T_c]_{00} + [T_c]_{11} - [T_c]_{22} - [T_c]_{33}) = (A + B) \text{tr}(T_c) \implies (4j+i)=5$$

$$m_{12} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{12}) = ([T_c]_{12} + [T_c]_{21}) + i([T_c]_{03} - [T_c]_{30}) \text{tr}(T_c)$$

$$m_{13} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{13}) = ([T_c]_{13} + [T_c]_{31}) + i([T_c]_{02} - [T_c]_{20})$$

Puis j=2

$$m_{20} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{20}) = ([T_c]_{02} + [T_c]_{20}) + i([T_c]_{13} - [T_c]_{31})$$

$$m_{21} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{21}) = ([T_c]_{12} + [T_c]_{21}) + i([T_c]_{03} - [T_c]_{30})$$

$$m_{22} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{22}) = ([T_c]_{00} - [T_c]_{11} + [T_c]_{22} - [T_c]_{33}) = (A - B) \text{tr}(T_c)$$

$$m_{23} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{23}) = ([T_c]_{23} + [T_c]_{32}) + i([T_c]_{01} - [T_c]_{10})$$

Et enfin j=3

$$m_{30} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{30}) = ([T_c]_{03} + [T_c]_{30}) + i([T_c]_{21} - [T_c]_{12})$$

$$m_{31} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{31}) = \text{tr}(T_c)$$

$$m_{32} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{32}) = ([T_c]_{23} + [T_c]_{32}) + i([T_c]_{01} - [T_c]_{10})$$

$$m_{33} = \text{tr}(T_c \cdot \eta_{33}) = ([T_c]_{00} - [T_c]_{11} - [T_c]_{22} + [T_c]_{33}) = (A \text{tr}(T_c) - B_0) \text{tr}(T_c)$$

On vérifie de la même façon que  $m_{00} + m_{11} + m_{22} + m_{33} = 2(A_0 + B_0) = 4[T_c]_{00}$

Et l'on déduit ainsi la valeurs de  $[T_c]_{00} = \frac{1}{4} \text{tr}(T_c) = \frac{1}{2}(A_0 + B_0)$

Soit finalement la matrice  $[M]$  :

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$[M] = \begin{bmatrix} A_0+B_0 & C+N & H+L & I+F \\ C-N & A+B & E+J & K+G \\ H-L & E-J & A-B & M+D \\ I-F & K-G & M-D & A_0-B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

## Interpretation Physique des valeurs propres en polarimetry optique d'objets diffractants:

### *S.R.Cloude Spie Vol 312188-99 (1997);*

Expansion des elements des matrices de Jones en un vecteur puis ensuite en formant un produit exterieur moyen et l'on peut dériver un nouveau operateur de diffraction qui est hermitique qui est en fait une représentation 1-1 des elements de la matrice de mueller M. On peut formellement définir un vecteur k telque :

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \implies k \equiv V(S) = \frac{1}{2} \text{Trace}(S\Psi) = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Où l'operation  $\text{Trace}(S\Psi)$  apparait ici comme le produit scalaire de deux matrices et dans le cas des matrices de Pauli on aura ainsi :

$$k = \frac{1}{2} \hat{i}$$

En effet ecrivant le produit scalaire :

$$\begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \equiv \hat{i}$$

k2 correspond au vecteur de Jones associé à une onde polarisée, k3 peut etre utilisé dans le cas d'une onde retrodiffusée où le theoreme de reciprocité restreint l'information sur S. k4 correspond au probleme la formulation la plus générale pour le probleme de diffraction en optique.

Parametrisation Unitaire du vecteur k: et son importance en physique:

On peut écrire :  $k_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha e^{i\phi_1} \\ \sin \alpha e^{i\phi_2} \end{bmatrix}$  puis  $k_3 = \begin{bmatrix} \cos \alpha e^{i\phi_1} \\ \sin \alpha \cos \beta e^{i\phi_2} \\ \sin \alpha \sin \beta e^{i\phi_3} \end{bmatrix}$  et donc également :

$$k_4 = \begin{bmatrix} \cos \alpha e^{i\phi_1} \\ \sin \alpha \cos \beta e^{i\phi_2} \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma e^{i\phi_3} \\ \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma e^{i\phi_4} \end{bmatrix} \equiv k. \text{ On laisse tomber l'indice } 4 \text{ par la suite.}$$

Theoreme de reduction d'un point cible optique

On peut toujours effectuer une transformation sur un vecteur k mesuré et le reduire à l'identité à l'aide des transformation successives suivantes:

:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi_4} \end{bmatrix} k$$

Toute ces rotations sont des rotations planaires (2D).

$\phi$  correspond à une rotation physique des coordonnées du détecteur (?). et  $\alpha$  mesure l'assymetrie de la matrice de Jones (  $\alpha=0$  matrice symetrique et  $\alpha=90^\circ$  la matrice est antysymmetric pour ses elements non diagonaux).

Le parametre le plus intéressant est sans nul doute  $\alpha$ . Il represente un degré intrinseque de liberté du systeme et dans le cas de la retrodiffusion on peut l'utiliser pour identifié le mecanisme de diffraction/diffusion (scattering). On peut l'utiliser pour distinguer entre mono ou multiple scattering et il est sensible à la forme des particules et l'anisotropie de diffraction associée à ces particules.

On considere par la suite l'interpretation dans le cas des problemes de diffraction optique.

$\alpha$  est continu dans l'intervalle  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Par exemple  $\alpha=0 \rightarrow$  vers  $90^\circ$ , on aura une transition continue de la premiere matrice de Pauli  $\sigma_0 \rightarrow \sigma_1$ . Pour le scattering de Rayleigh on aura  $\alpha=45^\circ$ . On pourra montrer que ce parametre est aussi relié à l'angle de diffraction.

Relation avec les Matrices de Mueller:

## F.Ferrieu Mueller anisotropie

On considère la nature stochastique du problème d'un milieu aléatoire avec une matrice de Mueller mesurée  $\langle M \rangle$  et en obtenir une estimation de  $\chi$  sur la base de modèle stochastique sensible. Le modèle se base sur les valeurs propres de  $\langle T \rangle$  mais il faut tout d'abord relier la matrice  $\langle T \rangle$  à  $\langle M \rangle$ : Pour différentes formes de  $\chi$  à partir de l'équation  $\frac{1}{2} \text{Trace}(S \chi)$ , on peut obtenir différentes formes pour le vecteur  $k$  et avec des dimensions  $N=2,3,4$ . Pour effectuer une transformation entre chacun on doit définir une matrice unitaire  $U_N, N \times N$ , de la façon suivante:

$k'_N = U_N k_N \implies si T = k'_N k'^T_N = U_N k_N (k_N^T U_N^T)$  et pour un processus stochastique, on aura  $\langle T \rangle = \frac{1}{N} \sum_i T_i$  une moyenne correspondant à tous les  $N$  éléments  $i$  diffractant.

$$\langle T \rangle = \frac{1}{N} \sum_i T_i = \frac{1}{N} \sum_i U k_i k_i^T U^T = U \left[ \frac{1}{N} \sum_i k_i k_i^T \right] U^T = U_N \Sigma U_N^T$$

Avec

$$U_N U_N^T = I \text{ et dans sa base propre } \Sigma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}. \text{ La matrice } \langle T \rangle \text{ possède une}$$

application point par point vers les éléments de  $\langle M \rangle$ , la matrice moyenne de Mueller observée en polarimétrie optique. Cette application est résumée par les deux équations suivantes.



F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$\text{Si } \hat{\epsilon} M \geq \begin{bmatrix} A_0+B_0 & C+N & H+L & I+F \\ C-N & A+B & E+J & K+G \\ H-L & E-J & A-B & M+D \\ I-F & K-G & M-D & A_0-B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

alors

$$\hat{\epsilon} T \geq \begin{bmatrix} A_0+A & C-iD & H+iG & I-iJ \\ C+iD & B_0+B & E+iF & K-iL \\ H-iG & E-iF & B_0-B & M-i \\ I+iJ & K+iL & M-i & A_0-A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

Cette application permet de calculer  $\langle T \rangle$  à partir de  $\langle M \rangle$  et inversement et donc d'obtenir la décomposition en vecteurs propres de  $\langle T \rangle$  suivant sa base propre constituée par ses vecteurs propres.

La suite est une illustration de la puissance de cette formulation:

Structure de Matrice de Mueller diagonales:

Dans le cas d'un depolariseur isotrope la matrice de Mueller prend la forme suivante:

$$\hat{\epsilon} M \geq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

La matrice  $\langle T \rangle$  est aussi diagonale , en utilisant

$$H \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{00}+m_{11} & m_{01}+m_{10} & m_{02}+m_{20} & m_{03}+m_{30} \\ +m_{22}+m_{33} & +i(m_{23}-m_{32}) & +i(m_{13}+m_{31}) & +i(m_{12}-m_{21}) \\ m_{01}+m_{10} & m_{00}+m_{22} & m_{11}-m_{22} & m_{13}+m_{31} \\ -i(m_{23}-m_{32}) & -m_{33}-m_{44} & -i(m_{23}+m_{32}) & -i(m_{02}-m_{20}) \\ m_{02}+m_{20} & m_{12}+m_{21} & m_{00}+m_{11} & m_{02}-m_{12} \\ +i(m_{13}-m_{31}) & +i(m_{30}-m_{03}) & -m_{22}-m_{33} & +i(m_{03}-m_{13}) \\ m_{03}+m_{30} & m_{13}+m_{31} & m_{23}-m_{32} & m_{00}-m_{11} \\ +i(m_{12}-m_{21}) & +i(m_{02}-m_{20}) & -i(m_{10}-m_{01}) & -m_{22}+m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\epsilon} T \geq \frac{1}{2} \hat{\epsilon}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+3\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}$$

Qu'il est possible d'ecrire :

STM

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} \\ m_{11} \\ m_{22} \\ m_{33} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres ont donc bien la forme générale :  $\lambda_1 = 1 + 3\gamma$ ,  $\lambda_2 = 1 - \gamma = \lambda_3 = \lambda_4$ .

On voit apparaître un sous espace dégénéré (dégénérescence 3), indiquant un bruit isotropique comme on peut s'attendre dans ce type de processus dépolarisant.

Moyenne stochastique : Modèle de Bernoulli :

cas d'une matrice de Mueller stochastique la décomposition de  $\langle T \rangle$  a les vecteurs propres suivant :

$$\hat{U} T \geq U_4 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} U_4^\dagger \implies \langle T \rangle U_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} U_4 \text{ ses 4 vecteurs propres associés}$$

permettent de définir la matrice  $U_4$  :

soit

$$U_4 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 e^{i\phi_1} & \cos \alpha_2 e^{i\phi_5} & \cos \alpha_3 e^{i\phi_9} & \cos \alpha_4 e^{i\phi_{13}} \\ \sin \alpha_1 \cos \beta_1 e^{i\phi_2} & \sin \alpha_2 \cos \beta_2 e^{i\phi_6} & \sin \alpha_3 \cos \beta_3 e^{i\phi_{10}} & \sin \alpha_4 \cos \beta_4 e^{i\phi_{14}} \\ \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \gamma_1 e^{i\phi_3} & \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \cos \gamma_2 e^{i\phi_7} & \sin \alpha_3 \sin \beta_3 \cos \gamma_3 e^{i\phi_{11}} & \sin \alpha_4 \sin \beta_{14} \cos \gamma_4 e^{i\phi_{15}} \\ \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 e^{i\phi_4} & \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2 e^{i\phi_8} & \sin \alpha_3 \sin \beta_3 \sin \gamma_3 e^{i\phi_{12}} & \sin \alpha_4 \sin \beta_4 \sin \gamma_4 e^{i\phi_{16}} \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un problème stochastique, un processus à 4 symboles de Bernoulli, les vecteurs propres représentent des états possibles du système et les valeurs propres normalisées, les probabilités que le système se trouve dans cet état. On définit le caractère aléatoire en définissant une entropie  $H$ ,  $0 \leq H \leq 1$  de telle sorte que :

$$H = - \sum_{i=1}^N P_i \log_N P_i \text{ où } P_i = \lambda_i / \sum_j \lambda_j.$$

Alors suivant ce modèle, on obtient une estimation des paramètres du système en prenant la moyenne suivante :

$$\hat{\alpha} = \sum_i P_i \alpha_i = P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_3 \alpha_3 + P_4 \alpha_4$$

$H$  est invariant au choix de l'optique, et des coordonnées du détecteur. L'interprétation de  $\hat{\alpha}$  dépend du système de coordonnées choisit.

On doit pouvoir, en employant ces équations, et mesurer les matrices de Mueller avoir une estimation du mécanisme de diffraction moyenne d'un système et l'état de son désordre à partir de l'estimation de l'entropie  $H$ . Avec  $H=0$ , on a un seul état, et l'intervalle complet de  $\hat{\alpha}$  peut être obtenu à partir de l'équation précédente c.a.d.

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$k_4 = \begin{bmatrix} \cos \alpha e^{i\phi_1} \\ \sin \alpha \cos \beta e^{i\phi_2} \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma e^{i\phi_3} \\ \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma e^{i\phi_4} \end{bmatrix} \equiv k$$

Avec  $H=1$ ,  $\langle T \rangle$  est diagonale, il y a impossibilité de distinguer différents mécanismes de scattering. Il nous faut alors regarder en détail entre ces deux régions extrêmes.

Entropy / espace Alfa:

hypothèse  $\psi = 0$  on aura

$$i T_{1 \geq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \text{ et donc}$$

$$P_1 = \frac{1}{1+3m}, P_2 = \frac{m}{1+3m} = P_3 = P_4$$

Soit

$$H = \frac{-1}{1+3m} \left\{ 1 \cdot \log_4 \frac{1}{1+3m} + 3m \cdot \log_4 \frac{m}{1+3m} \right\} = \frac{-1}{1+3m} \left\{ -\log_4 1+3m + \log_4 \left( \frac{m}{1+3m} \right)^{3m} \right\} = \frac{-1}{1+3m} \left\{ \log_4 \frac{m^{3m}}{(1+3m)^{3m}} \right\}$$

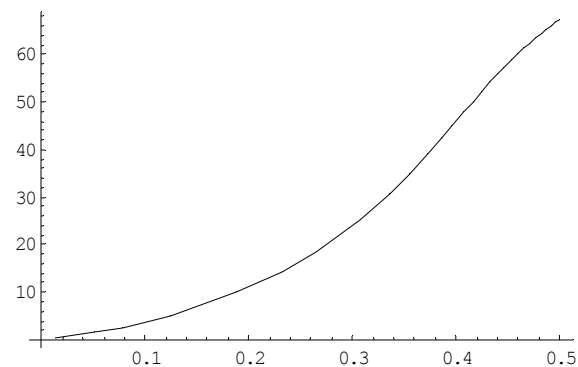
Et

$$\dot{\alpha} = \alpha_1 \frac{1}{1+3m} + \alpha_2 \frac{m}{1+3m} + \alpha_3 \frac{m}{1+3m} + \alpha_4 \frac{m}{1+3m} = \frac{1}{1+3m} (\alpha_1 + m\alpha_2 + m\alpha_3 + m\alpha_4)$$

$m$  va varier de 0 (alpha=0) à 1 (alpha=90°) =  $\frac{\pi}{2}$  soit  $\dot{\alpha} = 3m\pi/2(1+3m)$ .  $M$  représente

l'accroissement du bruit dans le sous espace ( $m$ ).

ParametricPlot[Log[4, m^3/(1+3m)] - Log[4, 1+3m], {m, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1}, PlotStyle -> {Red, Thickness[2]}]



On peut aussi considérer la situation de la valeur maximum de  $\dot{\alpha}$  encore pour  $H=0$ , on a un maximum pour  $\psi = 90^\circ$  et  $m$  compris entre 0 et 0.5

$$i T_{1 \geq} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m \end{bmatrix}$$

F.Ferrieu Mueller anisotropie

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} \text{ donne } P_1=0, P_2=1/(1+4m) \text{ et } P_3=P_4=2m/(1+4m)$$

D'oú

$$H = -\sum_{i=1}^N P_i \log_N P_i = -\left\{ \frac{1}{1+4m} \log_4 \frac{1}{1+4m} + \frac{4m}{1+4m} \log_4 \frac{2m}{1+4m} \right\} = -1 \left\{ \frac{1}{1+4m} \log_4 \frac{2m}{(1+4m)^{4m}} \right\}$$

et

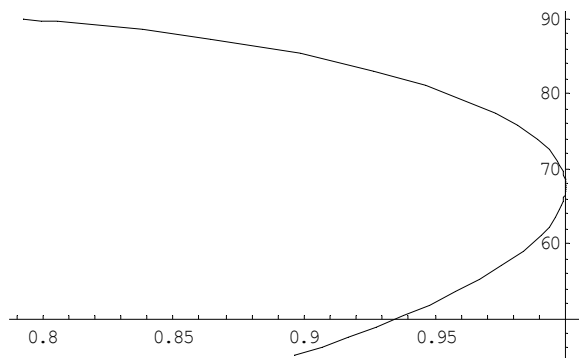
$$\acute{\alpha} = \sum_i P_i \alpha_i = P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_3 \alpha_3 + P_4 \alpha_4 \equiv 1 \text{ qui reste a 1 meme si H augmente.}$$

L'autre cas où  $0.5 \leq m \leq 1$  et  $\checkmark \bullet \tilde{\kappa}^\circ$

$$i T_1 \geq \begin{bmatrix} 2m-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{On aboutit à } \bar{\alpha} = \frac{3\pi}{4m+4}, H = \frac{-1}{(2m+2)} \log_4 \frac{(2m-1)^{2m}-1}{(2+2m)^{2+2m}}$$

Paramet. lot  $\log_4, 2m-1, m-1, 2, m, m, 2, 180, \pi, 4, m$   
 $\ln, 0.11, 2$



F.Ferrieu Mueller anisotropie

Simulation des effets de depolarization par une surface rugueuse dans le cas de l'ellipsometrie spectroscopique

(ref K.H.Jun,J.H.K. and K.Su Lim in J.Opt.Soc.Am A Vol 20,N°6 June 2003

*Utilisation de la methode d'integration ntegrale pour decrire les effets de depolarisation par une surface rugueuse*

*Formalisme des matrices de Mueller dans le cas d'unesurface rugueuse*

*Decomposition entre deux contributions coherentes et incoherentes.*

*La matrice de réflectivité cohérente spéculaire s'écrit :*

$$\hat{R}^c = \exp[-(k_{iz} - k_{sz})^2 h^2] \begin{bmatrix} |R_p|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |R_s|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Re\{R_p R_s^i\} & -\Im\{R_p R_s^i\} \\ 0 & 0 & +\Im\{R_p R_s^i\} & \Re\{R_p R_s^i\} \end{bmatrix}$$

*H est la rugosité RMS et  $R_{p,s}$  les coefficients de réflectivité de Fresnel.*

*Le terme incohérent est une diffusion dans toute les directions et ils écrivent :*